

УДК 518 : 517.392

## О КВАДРАТУРАХ НА СФЕРЕ

В. И. ЛЕВЕДЕВ

(Москва)

Предложены и исследованы методы получения квадратур типа Гаусса, инвариантных относительно группы вращения октаэдра с инверсией, приведены квадратуры типа Гаусса для  $n=19, 23$  и квадратуры типа Чебышева для  $n=11, 15$ . Даны оценки погрешности. Изложен метод Монте-Карло с малой дисперсией.

С. Л. Соболевым в работе [1] была поставлена задача о нахождении инвариантных относительно некоторой группы вращения квадратур типа Гаусса для сферы, веса и положения узлов в которых определяются из требования, чтобы квадратуры точно интегрировали все многочлены до возможно более высокой степени  $n$ , а узлы их были инвариантны относительно выбранной группы вращения. Такая постановка вопроса существенно облегчила анализ задачи построения квадратур. Некоторые квадратуры для сферы содержатся в работах [2-6]. Квадратуры типа Гаусса соответствуют полному использованию всех трех свободных параметров у каждого плавающего узла: его координат и веса. А ввиду однородности сферы можно надеяться на хорошее равномерное распределение на сфере узлов таких квадратур. Очевидно, что квадратуры типа Гаусса будут обладать меньшим по сравнению с обычными числом узлов. Поэтому их целесообразно использовать в некоторых областях применения численных методов, например в гармоническом анализе на сфере, в вычислении коэффициентов Фурье от функции при разложении ее по гармоническим многочленам [2] и, особенно, в разностных аппроксимациях интегральных операторов многомерных уравнений переноса частиц [7]. Однако задача определения весов и узлов квадратур типа Гаусса довольно сложна, ибо она сводится к решению нелинейных алгебраических систем уравнений.

В настоящей работе мы исследуем некоторые свойства таких систем и укажем пути решения их для случая, когда веса и узлы квадратур инвариантны относительно группы вращения октаэдра с инверсией  $G_8$ . В статье приведены квадратуры типа Гаусса для  $n=19, 23$  (квадратуры меньших степеней опубликованы автором в [8]) и квадратуры типа Чебышева для  $n=11, 15$ . Даны оценки погрешности. Изложен метод Монте-Карло с малой дисперсией.

## § 1

Пусть в трехмерном евклидовом пространстве  $R_3(x, y, z)$  задана сфера  $S: x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , а  $\Omega$  — вписанный в нее октаэдр, вершины которого лежат на осях координат. Пусть

$$(4.1) \quad I(f) = \frac{1}{4\pi} \int_S f(s) p(s) ds,$$

где  $z \in S$ ,  $p(s) \neq 0$  — интегрируемая весовая функция, инвариантная относительно  $G_s^*$  и такая, что  $I(1) = 1$ , а  $ds = \sin \theta d\theta d\varphi$ .

Квадратуры для (4.1) будем искать в виде

$$(4.2) \quad S_n(f) = A_1 \sum_{i=1}^6 f(a_i^1) + A_2 \sum_{i=1}^{12} f(a_i^2) + A_3 \sum_{i=1}^8 f(a_i^3) + \\ + \sum_{k=1}^{N_1} B_k \sum_{i=1}^{24} f(b_i^k) + \sum_{k=1}^{N_2} C_k \sum_{i=1}^{24} f(c_i^k) + \sum_{k=1}^{N_3} D_k \sum_{i=1}^{48} f(d_i^k),$$

где проекции узлов  $a_i^1, a_i^2, a_i^3, b_i^k, c_i^k, d_i^k$  на  $\Omega$  находятся, соответственно, в вершинах, серединах ребер, центрах граней, на биссектрисах и ребрах граней  $\Omega$ , а  $d_i^k \in S$  — узлы общего положения. Для каждого фиксированного  $k$  каждая группа узлов  $a_i^k, b_i^k, c_i^k, d_i^k$  инвариантна относительно  $G_s^*$ . Это значит, что узлы  $b_i^k, c_i^k, d_i^k$  имеют следующие координаты:

$$b_i^k: (\pm l_k, \pm l_k, \pm m_k), (\pm l_k, \pm m_k, \pm l_k), (\pm m_k, \pm l_k, \pm l_k), \text{ где } l_k = \\ = 2^{-1/2} (1 - m_k^2)^{1/2}; \\ c_i^k: (\pm p_k, \pm q_k, 0), (\pm p_k, 0, \pm q_k), (0, \pm p_k, \pm q_k), (\pm q_k, \pm p_k, 0), \\ (\pm q_k, 0, \pm p_k), (0, \pm q_k, \pm p_k), \text{ где } q_k = (1 - p_k^2)^{1/2}; \\ d_i^k: (\pm r_k, \pm u_k, \pm w_k), (\pm r_k, \pm w_k, \pm u_k), (\pm u_k, \pm r_k, \pm w_k), \\ (\pm u_k, \pm w_k, \pm r_k), (\pm w_k, \pm u_k, \pm r_k), (\pm w_k, \pm r_k, \pm u_k).$$

Метод получения квадратур основан на использовании теоремы 1 работы [1], согласно которой от квадратуры достаточно потребовать, чтобы она была точна лишь для инвариантных относительно  $G_s^*$  многочленов, число которых для каждой степени подсчитано в [1]. Построить все инвариантные относительно  $G_s^*$  многочлены поможет простая

*Лемма. Любой многочлен, инвариантный относительно группы  $G_s^*$ , представим на  $S$  в виде многочлена от  $\sigma_2 = x^2 y^2 + x^2 z^2 + y^2 z^2$  и  $\sigma_3 = x^2 y^2 z^2$ .*

В самом деле, любой многочлен  $P(x, y, z)$  степени  $n$ , инвариантный относительно  $G_s^*$ , обязан содержать лишь четные степени неизвестных, ибо  $P(\pm x, \pm y, \pm z) = P(x, y, z)$ , и быть инвариантным при любых перестановках переменных, т. е. быть симметрической функцией от переменных  $x^2, y^2, z^2$ . Следовательно,  $P(x, y, z)$  выражается через элементарные симметрические многочлены  $\sigma_1 = x^2 + y^2 + z^2$ ,  $\sigma_2 = x^2 y^2 + x^2 z^2 + y^2 z^2$  и  $\sigma_3 = x^2 y^2 z^2$ , т. е. он является многочленом от  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , но поскольку на сфере  $\sigma_1 = 1$ , то

$$P(x, y, z)|_S = Q(\sigma_2, \sigma_3) = \sum_{0 \leq i+j \leq n} a_{ij} \sigma_2^i \sigma_3^j.$$

Так как степень многочлена  $Q$  по переменным  $\sigma_2, \sigma_3$  существенно ниже  $n$ , то за новые переменные выгодно взять  $\sigma_2, \sigma_3$ .

Образующие базис многочлены в пространстве инвариантных относительно  $G_3^*$  многочленов до степени  $n \geq 6$  удобно для дальнейшего анализа взять в таком виде.

Группа  $A$ :

$$a_1 = 9\sigma_3 - 4\sigma_2 + 1, \quad a_2 = \sigma_2 - 9\sigma_3, \quad a_3 = \sigma_3, \quad a_4 = \frac{1}{3} \left( \sigma_3 + \frac{\sigma_2}{3} (1 - 4\sigma_2) \right).$$

Группа  $B$ :

$$b_{4i+6} = 4\sigma_3 b_i^i, \quad b_{4j+12} = 4\sigma_3 b_6 b_j^i,$$

где  $b_i = \frac{1}{3} (\frac{1}{3} - \sigma_2)$ ,  $b_6 = \frac{1}{9} (9\sigma_3 - 3\sigma_2 + \frac{2}{3})$ ,  $1 \leq i \leq \frac{1}{4}(n-6)$ ,  $1 \leq j \leq \frac{1}{4}(n-12)$ .

Группа  $C$ :

$$c_{4i+12} = \sigma_2^i c_{12},$$

где  $c_{12} = \sigma_2^2 (1 - 4\sigma_2) - \sigma_3 (4 + 27\sigma_3 - 18\sigma_2)$ ,  $0 \leq i \leq \frac{1}{4}(n-12)$ .

Группа  $D$ :

$$d_{ij} = \sigma_2^i \sigma_3^j c_{12}, \quad j \geq 1, \quad 6 \leq 4i + 6j \leq n - 12.$$

Пусть  $t = z^2$ ,  $\alpha = \sin^2 2\varphi$ ,  $v = t(1-t)$ . Для подсчета  $I(\sigma_2^i \sigma_3^j)$  многочлены  $\sigma_2, \sigma_3$  представляем в виде

$$\sigma_2 = \frac{(1-t)}{4} (4t + (1-t)\alpha), \quad \sigma_3 = \frac{t}{4} (1-t)^2 \alpha.$$

Пусть  $l_1(n), l_2(n), l_3(n)$  — число линейно-независимых многочленов, соответственно, в группах  $B, C, D$ . Степень квадратуры  $n$  удобно для исследования представить в виде

$$n = 12m + 2g + 1, \quad g = 0, 1, \dots, 5,$$

а качество ее оценивать величиной

$$\eta = \frac{(n+1)^2}{3N},$$

где  $N$  — общее число узлов квадратуры, а  $(n+1)^2$  — общее число правильно интегрируемых квадратурой первых сферических функций. Рассмотрим свойства функций групп  $A, B, C, D$ .

В группе  $A$  многочлены  $a_1, a_2, a_3$  шестой степени, а  $a_4$  — восьмой, причем  $a_1(a_1^4) = 1$ ,  $a_2(a_2^2) = \frac{1}{4}$ ,  $a_3(a_3^3) = \frac{1}{27}$ ,  $a_k(a_i^j) = 0$  при  $k \neq j$ ,  $a_k(a_i^j) = 0$ ,  $j = 1, 2, 3$ . Обозначим  $\alpha_i = I(a_i)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ .

В группе  $B$  многочлены обращаются в нуль при  $x=y=z=0$  и в точках  $a_i^k$ ;  $b_k = t(1-t)^2 (t - \frac{1}{3})^{k-6}$ ,  $k = 10, 12, \dots$ , при  $x=y$ . Для них  $l_1(n) = 6m + g - 4$ . Обозначим  $\beta_k = I(b_k)$ ,  $t_k = m_k^2$ ,  $\varphi(t) = t(1-t)(t - \frac{1}{3})^2$ ,  $\bar{B}_k = \bar{B}_k \varphi(t_k)$ ,  $\bar{B}_k = \bar{B}_k (1 - t_k)$ ,  $\bar{B}_k = B_k (1 - t_k) (t_k - \frac{1}{3})^2$ .

В группе  $C$  многочлены  $c_{4i+12}$  степени  $4i+12$  обращаются в нуль при  $x=y, x=z, y=z$  и в точках  $a_i^k$ . А при  $y=0$  или  $x=0$  будет  $c_{4i+12} = (1-4v)v^{2+i}$ ,

$i=0, 1, \dots$ . Для них  $l_2(n)=3m-2+[g/2]$ . Обозначим  $\gamma_{4i+12}=I(\sigma_2^i c_{12})$ ,  $v_k = -p_k^2(1-p_k^2)$ ,  $\psi(v)=v(1-4v)$ ,  $\bar{C}_k=C_k\psi(v_k)$ ,  $\tilde{C}_k=C_kv_k\psi(v_k)$ ,  $\hat{C}_k=C_kv_k$ .

В группе  $D$  многочлены  $d_{ij}$  степени  $4i+6j+12$  обращаются в нуль при  $x=y=z=0$  и  $x=y$ ,  $x=z$ ,  $y=z$ . Число многочленов  $d_{ij}$  степени  $2k+18$  равно  $[^2/3k]-[^1/2k]+^{1/2}(1+(-1)^k)$ , а  $l_3(n)=3m(m-2)+mj+2+[g/2]+x(g)$ , где  $x(g)=1$  при  $g=1, 2, 3, 4, 5$  и  $x(0)=0$ .

Обозначим  $\delta_i^j=I(\sigma_2^i \sigma_3^j c_{12})$ ,  $\bar{D}_k=D_k \sigma_3 c_{12}$ ,  $\tilde{D}_k=D_k c_{12}$ .

## § 2

Требуя, чтобы квадратура (1.2) была точна, т. е.

$$(2.1) \quad I(f)=S_n(f)$$

для выписанных многочленов групп  $A, B, C, D$  до степени  $n$  включительно, мы получим систему алгебраических уравнений, состоящую из четырех подсистем, которые обозначим также через  $A, B, C, D$ , в соответствии с подставляемыми в (2.1) группами функций. Группы неизвестных  $A_i, B_k, t_k, C_k, v_k, D_k, \sigma_{2k}, \sigma_{3k}$  также будем обозначать буквами  $A, B, C, D$  соответственно. Итак, система будет иметь следующий вид.

Подсистема  $A$ :

$$(2.2) \quad 6A_1+54 \sum_{k=1}^{N_1} B_k t_k (t_k^{-1/3})^2 + 24 \sum_{k=1}^{N_2} C_k (1-4v_k) + \\ + 48 \sum_{k=1}^{N_3} D_k a_1 (\sigma_{2k}, \sigma_{3k}) = \alpha_1,$$

$$(2.3) \quad 3A_2+54 \sum_{k=1}^{N_1} B_k (1-t_k) (t_k^{-1/3})^2 + 24 \sum_{k=1}^{N_2} C_k v_k + \\ + 48 \sum_{k=1}^{N_3} D_k a_2 (\sigma_{2k}, \sigma_{3k}) = \alpha_2,$$

$$(2.4) \quad \frac{8A_3}{27} + 6 \sum_{k=1}^{N_1} B_k t_k (1-t_k)^2 + 48 \sum_{k=1}^{N_3} D_k \sigma_{3k} = \alpha_3,$$

$$(2.5) \quad 24 \sum_{k=1}^{N_1} B_k \varphi(t_k) + \frac{32}{3} \sum_{k=1}^{N_2} C_k \psi(v_k) + 48 \sum_{k=1}^{N_3} D_k a_4 (\sigma_{2k}, \sigma_{3k}) = \alpha_4.$$

Подсистема  $B$ :

$$(2.6) \quad 24 \sum_{k=1}^{N_1} B_k \varphi(t_k) (1-t_k) (t_k^{-1/3})^{2i-2} + 192 \sum_{k=1}^{N_3} D_k \sigma_{3k} b_k^i (\sigma_{2k}) = \beta_{4i+6}, \\ 24 \sum_{k=1}^{N_1} B_k \varphi(t_k) (1-t_k) (t_k^{-1/3})^{2i-1} +$$

$$+192 \sum_{k=1}^{N_2} D_k \sigma_{2k} b_0(\sigma_{2k}, \sigma_{2k}) b_4^{i-1}(\sigma_{2k}) = \beta_{4i+12}, \quad i=1, 2, \dots$$

Подсистема C:

$$(2.7) \quad 24 \sum_{k=1}^{N_2} C_k \psi(v_k) v_k^{i+1} + 48 \sum_{k=1}^{N_2} D_k \sigma_{2k}^4 c_{12}(\sigma_{2k}, \sigma_{2k}) = \gamma_{4i+12}, \quad i=0, 1, \dots$$

Подсистема D:

$$(2.8) \quad 48 \sum_{k=1}^{N_2} D_k c_{12}(\sigma_{2k}, \sigma_{2k}) \sigma_{2k}^i \sigma_{2k}^j = \delta_i^j, \quad i=0, 1, \dots, \quad j=1, 2, \dots$$

Значения  $N_i$ ,  $i=1, 2, 3$ , и  $N$  выберем такими, чтобы общее число неизвестных в системе было равно числу уравнений. Для этого мы будем полагать в некоторых случаях  $A_2=0$  (в таблице — для  $n=9, 15, 17, 25, 29, 31, 41, 49$ ).

Приведем для каждого  $g$  формулы для  $N_i$ ,  $N$ , выраженные через  $m$ :  
 $g=0$ :

$$N_2 = \left[ \frac{3m-1}{2} \right], \quad N_3 = (m-1)^2, \quad N = \frac{1}{3}(n^2+n+40),$$

$\eta > 1$  при  $n \geq 49$ ;

если  $m$  нечетно, то  $N_1=3m-2$ , если  $m$  четно, то  $N_1=3m-1$  и  $A_2=0$ .

$g=1$ :  $N_1=3m-1$ ,  $N_3 = [\frac{1}{3}(3(m-1)^2+m+1)]$ ; если  $m=3q+r$ , где  $q, p$  целые, то имеем:

1) при  $p=0$

$$N_2 = \left[ \frac{3m-2}{2} \right], \quad N = \frac{1}{3}(n^2+n+30), \quad \eta > 1 \text{ при } n \geq 39;$$

если  $m$  четно, то  $A_2=0$ ;

2) при  $p=1$

$$N_2 = \left[ \frac{3m-1}{2} \right], \quad N = \frac{1}{3}(n^2+n+18), \quad \eta > 1 \text{ при } n \geq 51;$$

если  $m$  нечетно, то  $A_2=0$ ;

3) при  $p=2$

$$N_2 = \left[ \frac{3m-3}{2} \right], \quad N = \frac{1}{3}(n^2+n+42), \quad \eta > 1 \text{ при } n \geq 63;$$

если  $m$  нечетно, то  $A_2=0$ .

$g=2$ :  $N_1=3m$ ,  $N_2=m$ ,  $N_3=m(m-1)$ ,  $N = \frac{1}{3}(n^2+2n+7)$ ,  $A_2=0$ .

$g=3$ :  $N_1=3m$ ,  $N_2 = [(3m-2)/2]$ ,  $N_3 = m(m-1)+1$ ,  $N = \frac{1}{3}(n^2+n+58)$ ,  
 $\eta > 1$  при  $n \geq 67$ .

$g=4$ :  $N_1=3m$ ,  $N_3 = [\frac{1}{3}(3m^2-2m+2)]$ ; если  $m=3q+r$ , то имеем:

1) при  $p=0$ 

$$N_2 = \left[ \frac{3m+1}{2} \right], \quad N = \frac{1}{3}(n^2+n+24), \quad \eta > 1 \text{ при } n \geq 45;$$

2) при  $p=1$ 

$$N_2 = \left[ \frac{3m}{2} \right], \quad N = \frac{1}{3}(n^2+n+48), \quad \eta > 1 \text{ при } n \geq 57;$$

3) при  $p=2$ 

$$N_2 = \left[ \frac{3m+1}{2} \right], \quad N = \frac{1}{3}(n^2+n+36), \quad \eta > 1 \text{ при } n \geq 69.$$

$$g=5: \quad N_1=3m+1, \quad N_2=m, \quad N_3=m^2, \quad N=1/3(n^2+2n+7).$$

Распределение узлов на сфере при  $g=2, 5$  совпадает с точностью до инвариантного относительно  $G_s^*$  непрерывного преобразования с распределениями второго типа, предложенными в [1]. Распределения узлов при  $g=2, 5$  наиболее регулярно триангулируют поверхность сферы. Приведем таблицу значений  $n, N_1, N_2, N_3, N, \eta$ .

$n$	$N_1$	$N_2$	$N_3$	$N$	$\eta$	$n$	$N_1$	$N_2$	$N_3$	$N$	$\eta$
9	0	1	0	38	0.877	31	6	2	3	350	0.975
11	1	0	0	50	0.960	33	6	3	3	386	0.998
13	1	1	0	75	0.928	35	7	2	4	434	0.995
15	2	1	0	86	0.992	37	7	4	4	482	0.999
17	3	1	0	110	0.982	39	8	3	5	530	1.006
19	3	0	1	146	0.913	41	9	3	6	590	0.997
21	3	1	1	170	0.949	43	9	3	7	650	0.993
23	4	1	1	194	0.990	45	9	5	7	698	1.011
25	5	2	1	230	0.980	47	10	3	9	770	0.997
27	5	1	2	266	0.982	49	11	5	9	830	1.004
29	6	2	2	302	0.993	51	11	5	10	890	1.013

Прежде чем перейти к разбору способов решения системы уравнений (2.2)–(2.8), напомним, как решаются моментные системы уравнений от одного переменного. Пусть задана моментная система

$$(2.9) \quad \sum_{i=1}^p B_i u_i^k = c_k, \quad k=0, 1, \dots, 2p-1,$$

где определяются  $B_i, u_i$  по известным величинам  $c_k$ . Система (2.9) решается так. Находим вектор  $(f_0, \dots, f_{p-1})$  как решение линейной системы уравнений с ганкелевой матрицей:

$$(2.10) \quad \begin{aligned} c_0 f_0 + c_1 f_1 + \dots + c_{p-1} f_{p-1} &= c_p, \\ c_1 f_0 + c_2 f_1 + \dots + c_p f_{p-1} &= c_{p+1}, \\ &\dots \\ c_{p-1} f_0 + c_p f_1 + \dots + c_{2p-2} f_{p-1} &= c_{2p-1}. \end{aligned}$$

Тогда  $u_i$  будут корнями уравнения

$$(2.11) \quad F_p(u) = 0,$$

где  $F_p(u) = u^p - f_{p-1}u^{p-1} - f_{p-2}u^{p-2} - \dots - f_0$ , а  $B_i = G_{p-1}(u_i)/F_p'(u_i)$ , где  $G_{p-1}(u) = g_0 + g_1u + \dots + g_{p-1}u^{p-1}$  и

$$(2.12) \quad \begin{aligned} g_{p-1} &= c_0, \\ g_{p-2} &= c_1 - f_{p-1}c_0, \\ &\dots \\ g_0 &= c_{p-1} - f_{p-1}c_{p-2} - \dots - f_1c_0. \end{aligned}$$

Таким образом, решение системы (2.9) сводится к последовательному решению сначала системы линейных уравнений  $p$ -го порядка (2.10), а затем к нахождению корней алгебраического уравнения  $p$ -го порядка (2.11). Напомним, что  $u_i$  являются точками сосредоточения масс так называемого нижнего главного представления и что существуют критерии, когда  $B_i > 0$  и  $u_i$  лежат в заданном отрезке [8].

Перейдем к исследованию алгоритмов решения всей системы уравнений при  $n \geq 19$  (для  $n \leq 17$  будет  $N_3 = 0$  и методы решения описаны в [6]). Заметим следующее.

а. Неизвестные  $A_1, A_2, A_3$  входят только в одно из уравнений (2.2) — (2.4), поэтому эти уравнения мы используем для определения  $A_1, A_3$  и  $A_2$ , если  $A_2 \neq 0$ , через неизвестные групп  $B, C, D$ . Поскольку неизвестные каждой из групп  $B, C, D$  входят в уравнения (2.2) — (2.4) симметричным образом, то  $A_i$  выражаются рационально через симметрические многочлены от  $t_k, v_k, \sigma_{2k}, \sigma_{3k}$  соответственно. Присоединяя иногда к остальной системе уравнение (2.3) с  $A_2 = 0$ , мы будем это уравнение символически обозначать как  $A_2 = 0$ .

б. В подсистемах  $B, C, D$  будет возможна замена неизвестных  $B_k, C_k, D_k$ , понижающая алгебраический порядок всей системы. Эту замену мы указываем в каждом случае. Пусть  $h_k = (t_k - 1/3)$ .

в. По найденным значениям  $t_k, v_k, \sigma_{2k}, \sigma_{3k}$  координаты точек  $b_i^k, c_i^k, d_i^k$  определяются по формулам

$$m_k = t_k^{1/2}, \quad p_k = \left\{ \frac{1}{2} [1 + (1 - 4v_k)^{1/2}] \right\}^{1/2},$$

а  $r_k, u_k, w_k$  являются корнями уравнения

$$t^6 - t^4 + \sigma_{2k}t^2 - \sigma_{3k} = 0.$$

Разберем семь случаев. В случаях 1—4 система (2.5) — (2.8) распадается на три подсистемы, решаемые последовательно.

С л у ч а й 1.  $m$  нечетное, а  $g = 0$  или 4,  $p = 0$ . Сначала решаем подсистему относительно неизвестных  $D_k, \sigma_{2k}, \sigma_{3k}$ . Эта подсистема является моментной системой от двух переменных  $\sigma_2, \sigma_3$ . Найдя  $D_k, \sigma_{2k}, \sigma_{3k}$ , преобразуем подсистему  $B$  в моментную систему типа (2.9) относительно  $\bar{B}_k, h_k$ , которую решаем алгоритмом (2.10) — (2.12). Присоединяя к подсистеме  $C$  уравнение (2.5), получаем моментную систему типа (2.9) относительно  $\bar{C}_k, v_k$ .

Случай 2.  $g=4, p=0, m$  четно. Неизвестные групп  $D, B$  находятся, как в случае 1. Присоединяя к подсистеме  $C$  уравнение (2.5) и уравнение  $A_2=0$ , решаем ее как моментную систему типа (2.9) относительно неизвестных  $\bar{C}_k, v_k$ .

Случай 3.  $m$  четное,  $g=0$ . Сначала решаем подсистему  $D$  относительно неизвестных  $\bar{D}_k, \sigma_{2k}, \sigma_{3k}$ . Затем подсистему  $C$  — моментную систему типа (2.9) — относительно неизвестных  $\bar{C}_k, v_k$ . Присоединяя к подсистеме  $B$  уравнение (2.5) и уравнение  $A_2=0$ , преобразуем ее в моментную систему типа (2.9) относительно неизвестных  $\hat{B}_k, h_k$ .

Случай 4.  $m$  четное,  $g=1, p=1$ . Неизвестные групп  $D, C$  находятся, как в случае 3. Присоединяя к подсистеме  $B$  уравнение (2.5), преобразуем ее в моментную систему типа (2.9) относительно неизвестных  $\bar{B}_k, h_k$ .

В случаях 5—6 системы распадаются на две подсистемы:  $C, D$  и  $B$ .

Случай 5.  $g=5; g=3, m$  нечетно;  $g=1, p=0, m$  нечетно;  $g=1, p=2, m$  четно. Сначала решаем подсистему (2.7), (2.8) с неизвестными  $\bar{C}_k, v_k, D_k, \sigma_{2k}, \sigma_{3k}$ . Затем, присоединяя к подсистеме  $B$  уравнение (2.5), преобразуем ее в моментную систему типа (2.9) относительно неизвестных  $\bar{B}_k, h_k$ .

Случай 6.  $g=2$ ; неизвестные групп  $D, C$  находятся, как в случае 5. Затем, присоединяя к подсистеме  $B$  уравнение (2.5) и уравнение  $A_2=0$ , преобразуем ее в моментную систему типа (2.9) относительно неизвестных  $\hat{B}_k, h_k$ .

Случай 7. Прочие комбинации значений  $m, g, p$ . Здесь уравнение (2.5) или уравнение  $A_2=0$  связывают группы неизвестных  $B, C, D$ , поэтому вся система (2.6) — (2.8) не распадается на подсистемы. Заметим, что этот случай при  $n < 55$  наступает лишь три раза: при  $n=21, 31, 33$ .

Учитывая это, значения  $N_i, N$  из таблицы, а также то, что для моментных систем большого порядка от двух переменных не разработаны общие методы решения их, можно сделать вывод о том, что квадратурные формулы сравнительно нетрудно получить для  $n \leq 29, n \neq 21$ .

Для  $n \leq 29, p(x) \equiv 1$  приведем значения правых частей системы (2.2) — (2.8):

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 2/7, & \alpha_2 &= 4/35, & \alpha_3 &= 1/105, & \alpha_4 &= 16/945, \\ \beta_{10} &= 2^5/3^3 \cdot 385, & \beta_{12} &= 2^8/3^4 \cdot 5005, & \beta_{14} &= 2^9/3^5 \cdot 5005, \\ \beta_{16} &= 2^{13}/3^6 \cdot 85085, & \beta_{18} &= 2^{12} \cdot 67/3^7 \cdot 1616615, & \beta_{20} &= 2^{16}/3^8 \cdot 323323, \\ \beta_{22} &= 2^{17} \cdot 97/3^9 \cdot 85085 \cdot 437, & \beta_{24} &= 2^{20} \cdot 83/3^{10} \cdot 185910725, \\ \beta_{26} &= 2^{20} \cdot 139/3^{11} \cdot 185910725, & \beta_{28} &= 2^{23} \cdot 107/3^{12} \cdot 5^2 \cdot 30808063, \\ \gamma_{12} &= 2^5/15015, & \gamma_{16} &= 2^5/85085, & \gamma_{20} &= 2^5/440895, \\ \gamma_{24} &= 2^5 \cdot 37/79676025, & \gamma_{28} &= 2^5 \cdot 107/1078282205, \\ \delta_0^1 &= 2^5/4849845, & \delta_1^1 &= 2^5/22309287, & \delta_2^1 &= 2^5/98423325, \\ \delta_0^2 &= 2^5/557732175, & \delta_1^2 &= 2^5/2310604725. \end{aligned}$$

Приведем две квадратурные формулы при  $p(x) \equiv 1$ .

$$n=19$$

$$A_1 = 1856/3095235 = 10^{-4} \cdot 5.99631368862,$$

$$A_2 = 606208/82219995 = 10^{-3} \cdot 7.37299971862,$$



$$\begin{aligned}
A_3 &= 6490935/900204032 = 10^{-3} \cdot 7.21051536014; \\
B_1 &= 10^{-3} \cdot 7.57439415905, & B_2 &= 10^{-3} \cdot 6.75382948631, \\
B_3 &= 10^{-3} \cdot 7.11635549312; \\
m_1 &= 0.974888643677, & l_1 &= 0.157467667204, \\
m_2 &= 0.807089818360, & l_2 &= 0.417496122797, \\
m_3 &= 0.291298882210, & l_3 &= 0.676441040011; \\
D_1 &= 1773593/253693440 = 10^{-3} \cdot 6.99108735330, \\
r_1 &= 0.882270011260, & u_1 &= 0.140355381171, \\
w_1 &= 0.449332832327.
\end{aligned}$$

Здесь  $m_i^2$  — корни уравнения

$$243219t^3 - 319430t^2 + 92836t - 3848 = 0,$$

а  $\sigma_{21} = 3/17$ ,  $\sigma_{31} = 1/17 \cdot 19$ .

$$n = 23$$

$$\begin{aligned}
A_1 &= 2^7 \cdot 73/5242545 = 10^{-3} \cdot 1.78234044724, \\
A_2 &= 2^{14} \cdot 1663/3^3 \cdot 11^2 \cdot 1458821 = 10^{-3} \cdot 5.71690594998, \\
A_3 &= 3^{10} \cdot 1599797/2^9 \cdot 173^2 \cdot 13^2 \cdot 6545 = 10^{-3} \cdot 5.57338317884; \\
B_1 &= 10^{-3} \cdot 5.51877146727, & B_2 &= 10^{-3} \cdot 5.15823771181, \\
B_3 &= 10^{-3} \cdot 5.60870408259, & B_4 &= 10^{-3} \cdot 4.10677702817; \\
m_1 &= 0.777493219315, & l_1 &= 0.444693317871, \\
m_2 &= 0.912509096867, & l_2 &= 0.289246562758, \\
m_3 &= 0.314196994183, & l_3 &= 0.671297344270, \\
m_4 &= 0.982972302707, & l_4 &= 0.129933544765; \\
C_1 &= 38^4/33^2 \cdot 7^3 \cdot 1105 = 10^{-3} \cdot 5.05184606462, \\
p_1 &= 0.938319218138, & q_1 &= 0.345770219761; \\
D_1 &= 19^2 \cdot 23^6/7^3 \cdot 2^6 \cdot 3^2 \cdot 6113965 = 10^{-3} \cdot 5.53024891623, \\
r_1 &= 0.836036015482, & u_1 &= 0.159041710538, \\
w_1 &= 0.525118572443.
\end{aligned}$$

Здесь  $1 - m_k^2$  — корни уравнения

$$353533t^4 - 529549t^3 + 220210t^2 - 27932t + 712 = 0,$$

а  $v_1 = 2/19$ ,  $\sigma_{21} = 5/23$ ,  $\sigma_{31} = 49/19 \cdot 23^2$ .

Расположение узлов этих квадратур показано на фиг. 1, 2.

Описанный метод дает инвариантные относительно группы  $G_n^*$  квадратуры с минимальным числом узлов, для них  $\eta \rightarrow 1$  при  $n \rightarrow \infty$ . Остаются неисследованными следующие вопросы:

1) когда все веса квадратур положительны (например, при  $n=13$  (см. [6]) и при  $n=25, 27$  некоторые веса отрицательны) и как при  $n \rightarrow \infty$  ведет себя величина

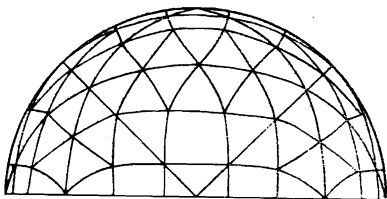
$$(2.13) \quad H_n = 6|A_1| + 12|A_2| + 8|A_3| + 24 \left( \sum_{k=1}^{N_1} |B_k| + \sum_{k=1}^{N_2} |C_k| + 2 \sum_{k=1}^{N_3} |D_k| \right)$$

( $H_n = 1$ , если все веса положительны);

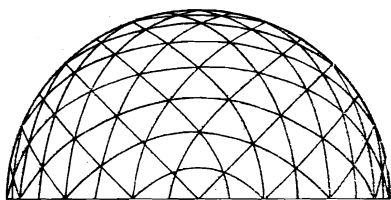
2) когда для заданных  $n$  и  $p(x)$  система уравнений имеет решение, соответствующее узлам, лежащим на сфере;

3) как асимптотически при  $n \rightarrow \infty$  распределены на сфере узлы квадратур.

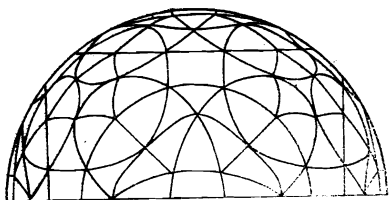
Можно высказать правдоподобную гипотезу, что квадратуры при  $p(x) \equiv 1$ ,  $g=2$ , 5 существуют, веса их выравнены и положительны, а узлы образуют правильную, почти равномерную триангуляцию сферы (см. фиг. 2).



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Аналогичным образом строятся квадратуры, в которых мы вместо условия  $A_2=0$  требуем, чтобы  $A_1=0$  или  $A_3=0$ . Существуют также квадратуры с другими соотношениями на  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $N_3$  (см. [6]). Упомянутые выше квадратуры содержат большее число узлов по сравнению с разобранными.

### § 3

Можно поставить задачу о нахождении квадратур типа Чебышева (квадратур с одинаковыми весами). Известно, что применение равных весов минимизирует вероятностную ошибку, если значения  $f(s)$  подвержены нормально распределенным вероятностным ошибкам. Тогда узлы квадратур находятся из решения нелинейной системы уравнений (2.2) — (2.8), в которой веса  $B_k$ ,  $C_k$ ,  $D_k$  считаются равными  $1/N$ , где  $N = 24(N_1 + N_2 + 2N_3)$ , а  $A_1 = A_2 = A_3 = 0$ . Для  $n=11$ ,  $p(x) \equiv 1$  найдена квадратура типа Чебышева, содержащая 96 узлов:

$$n=11$$

$$\begin{aligned} N_1=3, \quad N_2=1, \quad N_3=0, \quad N=96, \quad \eta=0.5, \quad B_1=B_2=B_3=C_1=1/96, \\ m_1=0.963560905, \quad l_1=0.189143308, \\ m_2=0.772965714, \quad l_2=0.448622338, \\ m_3=0.239106144, \quad l_3=0.686596043, \\ p_1=0.879538138, \quad q_1=0.475828397. \end{aligned}$$

Аналогично, для  $n=15$ ,  $p(x) \equiv 1$

$$\begin{aligned} N_1=4, \quad N_2=1, \quad N_3=1, \quad N=168, \quad \eta=0.508, \\ B_1=B_2=B_3=B_4=C_1=D_1=1/168, \\ m_1=0.409288638, \quad l_1=0.645167734, \\ m_2=0.791685755, \quad l_2=0.431991705, \\ m_3=0.920932787, \quad l_3=0.275574664, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_1 &= 0.980272193, & l_1 &= 0.139761275, \\ p_1 &= 0.446625750, & q_1 &= 0.894720872, \\ r_1 &= 0.154999420, & u_1 &= 0.593559863, & w_1 &= 0.789722653. \end{aligned}$$

Расположение узлов этой квадратуры показано на фиг. 3. Узлы этих квадратур сосчитаны Л. А. Толмачевой по программе решения систем нелинейных уравнений. Вопрос о существовании квадратур типа Чебышева для  $n \geq 17$  нуждается в дополнительных исследованиях. Вероятно, такие квадратуры следует искать при расположении узлов, характерных для описанных случаев при  $g=2, 5$ .

#### § 4

Пусть  $E_n(f)$  — наилучшее приближение функции  $f(s)$  многочленом  $P_n(s)$  степени  $n$ . Оценим погрешность квадратуры  $S_n(f)$ , точной для всех многочленов до  $n$ -й степени, через  $E_n(f)$  [9].

Учитывая (2.13), получаем

$$R_n(f) = |I(f) - S_n(f)| = |I(f - P_n) - S_n(f - P_n)| \leq (H_n + 1)E_n(f).$$

Если веса квадратуры положительные, то

$$R_n(f) \leq 2E_n(f).$$

Вычислим дисперсию  $S_n(f)$  для  $p(x) \equiv 1$ . Пусть  $\bar{P}_n(s)$  — многочлен степени  $n$ , дающий наилучшее в среднем приближение функции  $f$  (он совпадает с отрезком ряда Фурье разложения  $f(s)$  по сферическим функциям до  $n$ -го порядка). Пусть  $\bar{E}_n^2(f) = I((f - \bar{P}_n)^2)$ , а  $\varepsilon(s) = f(s) - \bar{P}_n(s)$ . Очевидно, что  $\bar{E}_n \leq E_n$  и

$$(4.1) \quad I(f) = S_n(\bar{P}_n).$$

Пусть  $SO(3)$  — группа вращения  $S$ ,  $g = g(\varphi, \theta, \psi) \in SO(3)$  — вещественная ортогональная матрица третьего порядка с единичным определителем, а  $\varphi, \theta, \psi$  — углы Эйлера, задающие вращение:  $0 \leq \psi < 2\pi$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$  [10].

Поскольку группа  $SO(3)$  для  $S$  транзитивна, то  $S$  является однородным пространством. Сфера  $S$  может быть реализована как пространство левых классов смежности по стационарной подгруппе  $H$  некоторой точки  $a \in S$ . Пусть

$$(4.2) \quad dg = \frac{1}{16\pi^2} \sin \theta d\theta d\varphi d\psi$$

есть мера на  $SO(3)$ , тогда [11]

$$I(f) = \int_{SO(3)} f(gs) dg.$$

Рассмотрим семейство квадратур

$$S_n(f, g) = S_n(f(gs)),$$

полученных применением квадратуры  $S_n$  к функции  $f(gs)$ . Поскольку пространства однородных многочленов степени  $k$  инвариантны относительно группы  $SO(3)$ , то для любого многочлена  $P(s)$  степени, не превышающей  $n$ , имеем

$$(4.3) \quad S_n(P(s), g) = S_n(P(s)),$$

ибо  $S_n(P) = I(P) = I(f(gs)) = S_n(P(s), g)$ .

Дисперсией  $S_n(f)$  назовем величину

$$D_n(f) = \int_{SO(3)} [I(f) - S_n(f, g)]^2 dg.$$

Оценим ее; согласно (4.1), (4.3), имеем

$$D_n(f) = \int_{SO(3)} [S_n(\bar{P}, g) - S_n(f, g)]^2 dg = \int_{SO(3)} [S_n(\varepsilon, g)]^2 dg.$$

Применяя неравенство Буняковского и учитывая (2.13), (4.1), (4.3), получаем

$$\begin{aligned} D_n(f) \leq H_n \int_{SO(3)} & \left[ |A_1| \sum_{i=1}^6 \varepsilon^2(ga_i^1) + |A_2| \sum_{i=1}^{12} \varepsilon^2(ga_i^2) + \right. \\ & + |A_3| \sum_{i=1}^8 \varepsilon^2(ga_i^3) + \sum_{k=1}^{N_1} |B_k| \sum_{i=1}^{2k} \varepsilon^2(gb_i^k) + \sum_{k=1}^{N_2} |C_k| \sum_{i=1}^{2k} \varepsilon^2(gc_i^k) + \\ & \left. + \sum_{k=1}^{N_3} |D_k| \sum_{i=1}^{4k} \varepsilon^2(gd_i^k) \right] dg = H_n^2 I(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

т. е.

$$(4.4) \quad D_n(f) \leq H_n^2 \bar{E}_n^2(f).$$

## § 5

Приемы с использованием простейшего типа симметрии для повышения точности квадратур со случайными узлами были предложены в [11]. Используя симметрию группы  $G_8^*$  и транзитивность группы  $SO(3)$ , мы предложим следующий метод Монте-Карло для вычисления  $I(f)$ . Пусть  $P_j(\varphi_j, \theta_j, \psi_j)$ ,  $j=1, 2, \dots, Q$ , есть  $Q$  случайных, попарно-независимых точек, одинаково распределенных на  $S$  с распределением  $dg$  (4.2), тогда  $g_j = g(\varphi_j, \theta_j, \psi_j)$  — случайный элемент  $SO(3)$ .

Положим  $S_{nj}(f) = S_n(f, g_j)$ ; случайные величины  $S_{nj}(f)$  попарно-независимы и одинаково распределены; математическое ожидание  $M$  и дисперсия  $D$  их равны

$$MS_{nj}(f) = \int_{SO(3)} S_n(f, g) dg = S_n(I(f)) = I(f)$$

и, согласно (4.4), (4.3),

$$D(S_{nj}(f)) = D(f) \leq H_n^2 \bar{E}_n^2(f).$$

Положим

$$J_{Qn}(f) = Q^{-1} \sum_{j=1}^Q S_{nj}(f).$$

Тогда, применяя стандартную технику доказательств, имеем

$$MJ_{Qn}(f) = Q^{-1} \sum_{j=1}^Q MS_{nj}(f) = I(f),$$

а

$$D(J_{Qn}(f)) = Q^{-2} \sum_{j=1}^Q D(S_{nj}(f)) = Q^{-1} D(f).$$

С вероятностью  $1-\eta$  выполняется неравенство Чебышева

$$|I(f) - J_{Qn}(f)| \leq \left( \frac{D(f)}{Q\eta} \right)^{1/2} \leq \frac{H_n \bar{E}_n(f)}{(Q\eta)^{1/4}}.$$

Если точки  $P_j$  еще и независимы в совокупности, то с вероятностью, асимптотически близкой при  $Q \rightarrow \infty$  к  $p(y)$ , имеем

$$|I(f) - J_{Qn}(f)| \leq \frac{y H_n \bar{E}_n(f)}{Q^{1/4}},$$

где

$$p(y) = 1 - \left( \frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \int_y^{\infty} \exp(-t^2/2) dt.$$

Примечания. 1. Веса и узлы квадратурной формулы 29-го порядка для сферы опубликованы в [12].

2. В работах [6, 13] автором допущены следующие неточности:

а) в таблице узлов для формулы 9.3 работы [6] координату  $l_1$  следует разделить на  $\sqrt{10}$ , а в формуле 17.1 положить:  $m_2 = 0.828769981253$ ,  $l_2 = 0.395689473056$ ,  $m_3 = 0.215957291846$ ,  $A_3 = 0.00979373751249$ ,  $B_1 = 0.00821173728319$ ;

б) при выводе квадратуры  $(2m+1)$ -го порядка для сферы в  $m$ -мерном пространстве в [13] учтены не все инвариантные многочлены.

Поступила в редакцию 8.04.1974  
Переработанный вариант 27.11.1975

#### Цитированная литература

1. С. Л. Соболев. О формулах механических квадратур на поверхности сферы. Сибирский матем. ж., 1962, 3, № 5, 486–496.
2. В. А. Диткин, Л. А. Люстерник. Об одном приеме практического гармонического анализа на сфере. В сб. «Вычисл. матем. и вычисл. техн.». Вып. 1, М., Ин-т точной механ. и вычисл. техн. АН СССР, 1953, 3–13.
3. И. П. Мысовских. О кубатурных формулах для вычисления интегралов на поверхности сферы. Сибирский матем. ж. 1964, 5, № 3, 721–723.
4. А. Д. Мак-Ларен. Формулы кубатуры на шаре. Докл. АН СССР, 1963, 151, № 5, 1029–1030; A. D. McLaren. Optimal numerical integration on a sphere. Math. Comput, 1963, 17, № 83, 361–383.

5. Г. Н. Салихов. Об одном способе повышения эффективности кубатурных формул С. Л. Соболева на сфере. В сб. «Вопр. вычисл. и прикл. матем.» Вып. 8. Ташкент, Ин-т кибернетики АН УзССР, 1971, 3–9.
  6. В. И. Лебедев. Значение узлов и весов квадратурных формул типа Гаусса – Маркова для сферы от 9-го до 17-го порядка точности, инвариантных относительно группы октаэдра с инверсией. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1975, 15, № 1, 48–54.
  7. Г. И. Марчук, В. И. Лебедев. Численные методы в теории переноса нейтронов. М., Атомиздат, 1971.
  8. М. Г. Крейн, А. Л. Нудельман. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. М., «Наука», 1973.
  9. Л. В. Канторович. Об особых приемах численного интегрирования четных и нечетных функций. Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1949, 28, 3–25.
  10. Н. Я. Виленкин. Специальные функции и теория представления групп. М., «Наука», 1965.
  11. Н. С. Бахвалов. О приближенном вычислении кратных интегралов. Вестн. МГУ. Сер. матем., 1959, 4, 3–18.
  12. В. И. Лебедев. Об одном способе интерполяции в  $n$ -мерном пространстве по произвольным узлам и некоторых квадратурных формулах. Тр. семинара «Вычисл. методы прикл. матем.» Вып. 10. Новосибирск, ВЦ СО АН СССР, 1975, 1–10.
  13. В. И. Лебедев. Вычисление квадратур типа Гаусса – Маркова для областей и весов, инвариантных относительно группы октаэдра с инверсией. В сб. «Вопросы вычисл. и прикл. матем.» Вып. 32. Ташкент, ИК с ВЦ АН УзССР, 1975, 77–84.
-