

# АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

# АСТРОФИЗИКА

ТОМ 12

МАЙ, 1976

ВЫПУСК 2

## ПЕРЕНОС ИЗЛУЧЕНИЯ В ПЛОСКОЙ АТМОСФЕРЕ С СИЛЬНЫМ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

М. М. БАСКО

Поступила 3 февраля 1975

Пересмотрена 8 мая 1975

В сильном магнитном поле сечения элементарных процессов взаимодействия излучения с веществом зависят от угла между направлением поля и распространения электромагнитной волны. Для решения уравнения переноса в этом случае применимы методы, разработанные при изучении переноса излучения в линиях. Подробно рассмотрен случай плоской полубесконечной атмосферы с постоянным потоком лучистой энергии и с экспоненциальным распределением первичных источников. Направленность выходящего излучения и распределение плотности лучистой энергии в атмосфере выражены через  $H$ -функцию Чандрасекара. В случае предельно сильного поля,  $v \ll v_H \rightarrow 0$ ,  $H$ -функция рассчитана численно. Здесь  $v_H = eH/2\pi m_e c$  — гирочастота электронов.

Общепринятая модель рентгеновского пульсара в двойной системе сводится к следующему: на вращающуюся замагниченную нейтронную звезду падает вещество, перетекающее с нормальной компоненты пары. Магнитное поле направляет падающее вещество в область магнитных полюсов, представляющих собой в этом случае яркие горячие пятна на поверхности нейтронной звезды. Рентгеновское излучение, идущее от этих пятен, пульсирует на частоте вращения нейтронной звезды. Сравнение с данными наблюдений показывает, что для объяснения наблюдаемой формы рентгеновских импульсов необходимо предположить, что излучение горячих пятен направлено.

Если магнитное поле на поверхности нейтронной звезды достаточно велико,  $H \gtrsim 10^{12} \div 10^{13}$  гс, и  $v \ll v_H = eH/2\pi m_e c$ , то сечения рассеяния и поглощения излучения становятся анизотропными [1]. В данной работе приводится решение задачи о переносе излучения в плоской атмосфере с анизотропными сечениями, угловая зависимость которых имеет вид (1)—(4). На этом решении основана модель карандашной диаграммы направ-

ленности излучения аккрецирующих рентгеновских пульсаров, подробно обсуждающаяся в [2].

1. Сечения элементарных процессов. Наибольший практический интерес представляют два основных процесса, дающих вклад в непрозрачность атмосферы: тормозное поглощение и томсоновское рассеяние. В магнитоактивной плазме независимо друг от друга распространяются два типа электромагнитных волн: «обыкновенная» и «необыкновенная» — каждая со своей поляризацией. В пределе экстремально сильного магнитного поля, когда во всем интересующем нас диапазоне частот  $\nu \ll \nu_H$ , т. е. когда  $kT_e \ll h\nu_H$ , генерацией необыкновенной волны можно пренебречь. Коэффициент тормозного поглощения и дифференциальное сечение рассеяния обыкновенной волны в этом пределе принимают вид [1, 3]:

$$k_{ff}(\nu, \theta) = k_{ff}^{(0)}(\nu) \sin^2 \theta, \quad (1)$$

$$d\sigma_s(\theta \rightarrow \theta') = \frac{3}{8\pi} \sigma_T \sin^2 \theta \sin^2 \theta' d\Omega'. \quad (2)$$

Здесь и ниже предполагается, что магнитное поле направлено вдоль оси  $Z$ , которая нормальна к плоскости полубесконечной атмосферы; полярные углы  $\theta$  и  $\theta'$  измеряются по отношению к этой же оси;  $k_{ff}^{(0)}(\nu)$  — коэффициент тормозного поглощения в отсутствие магнитного поля,  $\sigma_T = 6.65 \times 10^{-25}$  см<sup>2</sup> — сечение рассеяния Томсона.

Понятие плоской полубесконечной атмосферы с сечениями вида (1) — (2) не вполне корректно, поскольку оптическая толщина такой атмосферы вдоль направления  $\theta=0$  равна  $\tau_{ff} = \tau_s = 0$ , тогда как вдоль любого другого направления  $\theta \neq 0$  эта толщина  $\tau_{ff} = \tau_s = \infty$ . Чтобы избавиться от этой некорректности, а заодно и оценить влияние малой, но конечной величины отношения  $\nu/\nu_H$ , введем малый параметр  $\varepsilon = (\nu/\nu_H)^2$  и примем следующий вид угловой зависимости сечений элементарных процессов:

$$k_{ff}(\nu, \theta) = k_{ff}^{(0)}[\sin^2 \theta + \varepsilon], \quad (3)$$

$$d\sigma_s(\theta \rightarrow \theta') = \frac{3}{8\pi} \left(1 + \frac{3}{2} \varepsilon\right)^{-1} \sigma_T (\sin^2 \theta + \varepsilon) (\sin^2 \theta' + \varepsilon) d\Omega'. \quad (4)$$

Хотя выписанные выражения и не представляют собой точный вид разложения соответствующих сечений вплоть до первого порядка малости по  $(\nu/\nu_H)^2$ , тем не менее они качественно правильно описывают поведение этих сечений вблизи малых углов  $\theta \ll 1$ .

2. Уравнение переноса и интегральные уравнения стационарности. Уравнение переноса в плоской полубесконечной атмосфере, основной вклад

в непрозрачность которой дают тормозное поглощение и томсоновское рассеяние с сечениями вида (3)—(4), имеет вид

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial I(\nu, z, \mu)}{\partial z} = & -(1 - \mu^2 + \varepsilon) [k_T(z) + k_{ff}(\nu, z)] I(\nu, z, \mu) + \\ & + (1 - \mu^2 + \varepsilon) k_T(z) \frac{3}{4} \left(1 + \frac{3}{2} \varepsilon\right)^{-1} \int_{-1}^{+1} (1 - \mu'^2 + \varepsilon) I(\nu, z, \mu') d\mu' + \\ & + (1 - \mu^2 + \varepsilon) k_{ff}(\nu, z) \frac{1}{2} B(\nu, T_e). \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь  $\mu = \cos \theta$ ,  $I(\nu, z, \mu)$  — интенсивность излучения,  $k_T(z) = \sigma_T N_e(z)$  и  $k_{ff}(\nu, z)$  — коэффициенты непрозрачности атмосферы в отсутствие магнитного поля (индекс „0“ у  $k_{ff}^{(0)}(\nu, z)$  в дальнейшем опускаем),  $B(\nu, T_e)$  — интенсивность равновесного чернотельного излучения с температурой  $T_e$ . Множитель 1/2 перед  $B(\nu, T_e)$  учитывает тот факт, что мы пренебрегли генерацией необыкновенной волны, и поле равновесного излучения содержит лишь одну поляризацию, соответствующую обыкновенной волне.

Решение уравнения (5) мы будем проводить в приближении серой атмосферы; т. е. предположим, что коэффициент тормозного поглощения  $k_{ff}(\nu, z) \equiv k_{ff}(z)$  и постоянная  $\varepsilon$  не зависят от частоты. Вводя в качестве независимой переменной оптическую толщину

$$\tau = \int_z^{\infty} [k_T(z) + k_{ff}(z)] dz,$$

перепишем (5) в виде

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{1 - \mu^2 + \varepsilon} \frac{\partial I(\tau, \mu)}{\partial \tau} = & I(\tau, \mu) - \\ & - \frac{k_T}{k_T + k_{ff}} \frac{3}{4} \left(1 + \frac{3}{2} \varepsilon\right)^{-1} \int_{-1}^{+1} (1 - \mu'^2 + \varepsilon) I(\tau, \mu') d\mu' - \frac{k_{ff}}{k_T + k_{ff}} \frac{\sigma T_e^4}{2\pi}. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь  $I(\tau, \mu) = \int_0^{\infty} I(\nu, \tau, \mu) d\nu$ ,  $\sigma$  — постоянная Стефана-Больцмана.

На протяжении всей статьи в качестве независимой переменной, характеризующей данный слой атмосферы, используется оптическая толщина  $\tau$ , на которой этот слой был бы расположен в отсутствие магнитного поля.

Как показано ниже, существует аналогия между рассматриваемой задачей и задачей о переносе излучения в линии в предположении полного перераспределения по частотам. В такой аналогии оптической толщине  $\tau$  соответствует оптическая толщина в центре линии.

Обозначим

$$L(\tau) = \frac{3}{4} \left(1 + \frac{3}{2} \varepsilon\right)^{-1} \int_{-1}^{+1} (1 - \mu^2 + \varepsilon) I(\tau, \mu) d\mu \quad (7)$$

и введем функцию источников

$$S(\tau) = \frac{k_T}{k_T + k_{ff}} L(\tau) + \frac{k_{ff}}{k_T + k_{ff}} \frac{\sigma T_e^4}{2\pi} \quad (8)$$

Тогда уравнение переноса (6) может быть записано в виде

$$\frac{\mu}{1 - \mu^2 + \varepsilon} \frac{\partial I(\tau, \mu)}{\partial \tau} = I(\tau, \mu) - S(\tau). \quad (9)$$

Разрешая его относительно  $I(\tau, \mu)$  при обычном граничном условии  $I(0, \mu)|_{\mu < 0} = 0$  и подставляя результат в (7), получаем

$$L(\tau) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} K_s(|\tau - \xi|) S(\xi) d\xi, \quad (10)$$

где

$$K_s(\tau) = \frac{3}{2} \left(1 + \frac{3}{2} \varepsilon\right)^{-1} \int_0^1 \frac{(1 - \mu^2 + \varepsilon)^2}{\mu} \exp\left[-\frac{\tau}{\mu}(1 - \mu^2 + \varepsilon)\right] d\mu. \quad (11)$$

Ядро  $K_s(\tau)$  нормировано обычным образом:

$$\int_0^{\infty} K_s(\tau) d\tau = 1.$$

Подставляя (10) в (8), получаем согласно терминологии, принятой в [4], интегральное уравнение стационарности:

$$S(\tau) = \frac{k_T}{k_T + k_{ff}} \frac{1}{2} \int_0^{\infty} K_s(|\tau - \xi|) S(\xi) d\xi + \frac{k_{ff}}{k_T + k_{ff}} \frac{\sigma T_e^4}{2\pi}. \quad (12)$$



Если известно распределение температуры по атмосфере  $T_e(z)$ , то функции  $k_T(\tau)$  и  $k_{ff}(\tau)$  известны, и интегральное уравнение (12) становится линейным. Решив его, найдем  $S(\tau)$ , а затем, по известной  $S(\tau)$ , из (9) можно без труда найти  $I(\tau, \mu)$ .

Однако в астрофизике часто встречается ситуация, когда  $T_e(z)$  неизвестна, а известно распределение источников энергии по атмосфере. В этом случае уравнение (12) удобно переписать в виде:

$$S(\tau) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} K_s(|\tau - \xi|) S(\xi) d\xi - \frac{3}{8} \left(1 + \frac{3}{2} \varepsilon\right)^{-1} \frac{dF^2(\tau)}{d\tau}. \quad (13)$$

Здесь  $\pi F^2(\tau) = 2\pi \int_{-1}^{+1} \mu I(\tau, \mu) d\mu$  — поток лучистой энергии через единичную площадку, нормальную к оси  $z$ . Ниже все внимание сосредотачивается на уравнении (13), которое будет называться основным интегральным уравнением.

3. *Решение основного интегрального уравнения.* Рассматриваемая в данной статье задача во многом напоминает задачу о переносе излучения в линии: подобно тому, как в далеких крыльях линии фотоны могут свободно выходить из глубоких слоев атмосферы, в сильном магнитном поле фотоны свободно выходят из глубоких слоев при малых углах  $\theta$ , если только  $\varepsilon < \theta^2$  (в частности при  $\varepsilon = 0$ ). Эта аналогия позволяет воспользоваться для решения уравнения (13) (которое отличается от аналогичных уравнений, описывающих перенос излучения в линиях и при монохроматическом консервативном рассеянии, лишь видом ядра  $K_s(\tau)$ ) тем математическим аппаратом, который был развит в работах В. В. Соболева и К. Кейса (К. Case); подробную библиографию см. в [4]. Как будет видно из дальнейшего, в математическом отношении рассматриваемая задача представляет собой промежуточный случай между монохроматическим рассеянием и переносом в линии. Поэтому все время будет проводиться сравнение с этими двумя крайними случаями; индексом «S» будут обозначаться все функции, описывающие монохроматическое консервативное рассеяние, а индексами «D» и «L» — функции, описывающие перенос в линии соответственно с доплеровским профилем (сечение поглощения пропорционально  $\exp[-(v/v)^2]$ ) и с лоренцовским профилем (сечение поглощения пропорционально  $[1 + (v/v_0)^2]^{-1}$ ).

Ядро интегрального уравнения  $K_s(\tau)$  представляется в стандартном виде суперпозиции экспонент

$$K_{\varepsilon}(\tau) = \int_0^{\infty} e^{-\tau/x} G_{\varepsilon}(x) \frac{dx}{x}, \quad (14)$$

где  $x = \mu/(1 - \mu^2 + \varepsilon)$ , а

$$G_{\varepsilon}(x) = \begin{cases} \frac{3}{2} \left(1 + \frac{3}{2} \varepsilon\right)^{-1} \frac{\mu^3}{(1 + \mu^2 + \varepsilon)x^3}, & 0 < x \leq \varepsilon^{-1}; \\ 0, & x > \varepsilon^{-1}. \end{cases} \quad (15)$$

Асимптотическое поведение  $G_{\varepsilon=0}(x) \equiv G_0(x)$  и  $K_{\varepsilon=0}(\tau) \equiv K_0(\tau)$  при  $x \rightarrow \infty$  и  $\tau \rightarrow \infty$  в сравнении с изученными ранее (см., например, [4]) аналогичными асимптотиками имеет вид:

$$G_{\varepsilon}(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \leq 1; \\ 0, & x > 1; \end{cases} \quad G_0(x) \sim \frac{3}{4x^3}; \quad G_D(x) \sim \frac{1}{2x^2 \sqrt{\pi \ln x}}; \\ G_L(x) \sim \frac{2}{3\pi x^{3/2}};$$

$$K_{\varepsilon}(\tau) \sim \frac{e^{-\tau}}{\tau}; \quad K_0(\tau) \sim \frac{3}{2\tau^3}; \quad K_D(\tau) \sim \frac{1}{2\tau^2 \sqrt{\pi \ln \tau}}; \quad K_L(\tau) \sim \frac{1}{3\sqrt{\pi} \tau^{3/2}}.$$

Если  $0 < \varepsilon \ll 1$ , то при  $1 \ll \tau \ll \varepsilon^{-1}$ , ядро  $K_{\varepsilon}(\tau) \sim 3/2 \tau^{-3}$ , а при  $\tau \gg \varepsilon^{-1}$  оно убывает экспоненциально,  $K_{\varepsilon}(\tau) \sim \frac{3}{4} \frac{\varepsilon^{\tau}}{\tau} e^{-\tau}$ . Отметим, что рассматриваемая задача не сводится полностью к задаче о переносе излучения в линии с определенным профилем, поскольку для этого необходимо  $G_{\varepsilon}(x) = \text{const}$  при  $0 < x < 1$ . Асимптотическое поведение  $G_0(x) \sim (3/4)x^{-3}$  при больших  $x$  соответствует профилю линии, который обращается в нуль по линейному закону на некотором конечном расстоянии от центра линии.

Чтобы решить уравнение (13), нужно найти резольвенту  $\Gamma_{\varepsilon}(\tau, \tau')$ :

$$S(\tau) = S^*(\tau) + \int_0^{\infty} \Gamma_{\varepsilon}(\tau, \xi) S^*(\xi) d\xi;$$

здесь

$$S^*(\tau) = -\frac{3}{8} \left(1 + \frac{3}{2} \varepsilon\right)^{-1} dF(\tau)/d\tau.$$

Резольвента  $\Gamma_{\varepsilon}(\tau, \tau')$  выражается через резольвентную функцию  $\Phi_{\varepsilon}(\tau) = \Gamma_{\varepsilon}(\tau, 0) = \Gamma_{\varepsilon}(0, \tau)$ :

$$\Gamma_s(\tau, \tau') = \Phi_s(|\tau - \tau'|) + \int_0^{\min\{\tau, \tau'\}} \Phi_s(\tau - t) \Phi_s(\tau' - t) dt,$$

которая в свою очередь удовлетворяет интегральному уравнению

$$\Phi_s(\tau) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} K_s(|\tau - \xi|) \Phi_s(\xi) d\xi + \frac{1}{2} K_s(\tau). \quad (16)$$

Преобразование Лапласа от  $\Phi_s(\tau)$  приводит к хорошо известной  $H$ -функции Чандрасекара:

$$H_s(x) = 1 + \int_0^{\infty} \Phi_s(t) e^{-tx} dt, \quad (17)$$

которая удовлетворяет нелинейному интегральному уравнению

$$H_s(x) = 1 + \frac{1}{2} x H_s(x) \int_0^{\infty} \frac{H_s(\xi) G_s(\xi)}{x + \xi} d\xi. \quad (18)$$

Это уравнение можно также переписать в виде

$$H_s(x) = \frac{2}{\int_0^{\infty} \frac{\xi}{\xi + x} H_s(\xi) G_s(\xi) d\xi}. \quad (19)$$

В дальнейшем нам понадобится функция  $P_s(\tau, x)$ , удовлетворяющая интегральному уравнению

$$P_s(\tau, x) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} K_s(|\tau - t|) P_s(t, x) dt + e^{-\tau/x}. \quad (20)$$

она выражается через  $H_s(x)$  и  $\Phi_s(\tau)$ :

$$P_s(\tau, x) = H_s(x) \left\{ e^{-\tau/x} + \int_0^{\tau} \Phi_s(t) \exp[-(\tau - t)/x] dt \right\}. \quad (21)$$

Таким образом, решение уравнения (13) эквивалентно нахождению

$H$ -функции  $H_i(x)$ , удовлетворяющей уравнению (18). Из (18) и (19) видно, что  $H_i(x)$  в интервале  $0 < x < \infty$  монотонно возрастает от  $H_i(0) = 1$  до  $H_i(\infty) = \infty$ , и

$$\int_0^{\infty} H_i(x) G_i(x) dx = 2. \quad (22)$$

Можно показать также, что если  $\varepsilon_2 \gg \varepsilon_1$ , то  $H_{\varepsilon_2}(x) \gg H_{\varepsilon_1}(x)$ . Легко доказывается, что при  $x \gg \varepsilon^{-1}$

$$H_i(x) \sim \frac{2x}{\int_0^x H_i(\xi) G_i(\xi) d\xi} \equiv \frac{2}{z_1(\varepsilon)} x.$$

Первый момент  $H$ -функции  $z_1(\varepsilon)$  слабо зависит от  $\varepsilon$ ; при  $\varepsilon \ll 1$  его можно оценить численно, положив  $G_i(x) = G_0(x)$  и  $H_i(x) = H_0(x)$  в интервале  $0 < x < \varepsilon^{-1}$ . Такие оценки показывают, что  $z_1(0.01) \approx 3.4$ , а  $z_1(0.0001) \approx 4.3$ . При  $1 \ll x \ll \varepsilon^{-1}$  функция  $H_i(x) \sim \frac{2}{\sqrt{3}} x / \sqrt{\ln x}$ .

Остановимся подробнее на двух конкретных случаях распределения источников лучистой энергии  $dF(\tau)/d\tau$  по атмосфере:

а) *Постоянный поток лучистой энергии*,  $F = \text{const}$ . В этом случае уравнение (13) становится однородным. Дифференцируя его по  $\tau$  и сравнивая результат с (16), заключаем, что  $dS(\tau)/d\tau = S(\tau) \Phi_i(\tau)$ , откуда

$$S(\tau) = L(\tau) = S(0) \left[ 1 + \int_0^{\tau} \Phi_i(t) dt \right]. \quad (23)$$

Интенсивность выходящего излучения имеет вид:

$$I(0, \mu) = \frac{3}{4} \left( 1 + \frac{3}{2} \varepsilon \right)^{-1} \frac{F}{z_1(\varepsilon)} H_i \left( \frac{\mu}{1 - \mu^2 + \varepsilon} \right). \quad (24)$$

б) *Экспоненциальное распределение первичных источников*,  $F(\tau) = F(0) e^{-\tau/\tau_0}$ . Сравнивая в этом случае (13) с (20), делаем вывод, что

$$S(\tau) = \frac{3}{8} \left( 1 + \frac{3}{2} \varepsilon \right)^{-1} F(0) \frac{H_i(\tau_0)}{\tau_0} \left\{ e^{-\tau/\tau_0} + \int_0^{\tau} \Phi_i(t) \exp \left( -\frac{\tau-t}{\tau_0} \right) dt \right\}. \quad (25)$$



Интенсивность выходящего излучения дается выражением:

$$I(0, \mu) = \frac{3}{8} \left(1 + \frac{3}{2} \varepsilon\right)^{-1} F(0) \frac{H_0(\tau_0) H_0[\mu/(1 - \mu^2 + \varepsilon)]}{\mu/(1 - \mu^2 + \varepsilon) + \tau_0}. \quad (26)$$

Из (24) видно, что угловое распределение выходящего излучения при  $\varepsilon \ll 1$  является существенно анизотропным; диаграмма направленности относится к типу «карандашных». Угловая полуширина «карандаша»  $\theta_0 \sim \sqrt{\varepsilon}$ . Если в (24) перейти к пределу  $\varepsilon \rightarrow 0$  при фиксированном потоке  $F$ , то диаграмма направленности примет вид  $I(0, \mu) = 1/2 F \delta(1 - \mu)$ . С другой стороны, выражение (24) есть предельный случай диаграммы (26) при

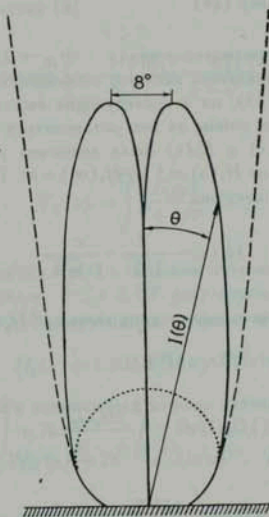


Рис. 1. Индикатриса проинтегрированной по частоте интенсивности излучения, выходящего из чисто рассеивающей атмосферы с сечением рассеяния (2). Сплошная линия—экспоненциальное распределение первичных источников. Штриховая линия—постоянный поток лучистой энергии. Пунктирная линия—постоянный поток лучистой энергии в атмосфере с изотропным сечением рассеяния.

$\tau_0 \rightarrow \infty$ . На рис. 1 штриховой линией изображен предельный вид диаграммы (24) при  $\varepsilon \rightarrow 0$  и  $I(0, 1) = \text{const}$ , который в то же время представляет собой предельный вид (26) при  $\varepsilon = 0$  и  $\tau_0 \rightarrow \infty$ . На этом же рисунке для срав-

нения приведена индикатриса выходящего излучения в случае монохроматического консервативного рассеяния, когда поток лучистой энергии в атмосфере постоянен. В этом, хорошо изученном случае,  $I_s(0, \mu) = (\sqrt{3}/4) F H_s(\mu)$ , где  $\pi F$  — постоянный поток энергии, а  $H_s(\mu)$  — функция Амбарцумяна.

В случае экспоненциального распределения источников энергии диаграмма направленности выходящего излучения (26) зависит от двух параметров:  $\varepsilon$  и  $\tau_0$ . При  $\tau_0 \ll \varepsilon^{-1}$  форма диаграммы определяется лишь значением  $\tau_0$ ; угловая полуширина «карандаша»  $\theta_0 \sim 1/\sqrt{\tau_0}$ . Индикатриса выходящего излучения при  $\varepsilon=0$  и  $\tau_0=20^\circ$  представлена на рис. 1 сплошной линией. В обратном пределе  $\tau_0 \gg \varepsilon^{-1}$  индикатриса (26) переходит в обсуждавшуюся ранее индикатрису (24).

4. *Случай предельно сильного поля*,  $\nu/\nu_H \rightarrow 0$ . Переход к пределу  $\varepsilon \rightarrow 0$  не приводит к появлению каких-то особенностей ни в основном интегральном уравнении (13), ни в последующих выкладках. Поэтому случай  $\varepsilon=0$  заслуживает того, чтобы на нем остановиться подробнее.

Асимптотика  $G_0(x)$  и  $K_0(\tau)$  была выписана ранее. Функция  $H_0(x)$  монотонно возрастает от  $H_0(0)=1$  до  $H_0(\infty)=\infty$ . При  $x \gg 1$  асимптотическое поведение  $H_0(x)$  имеет вид\*\*

$$H_0(x) \sim \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{x}{\sqrt{\ln x}}. \quad (27)$$

Действительно, будем искать асимптотику  $H_0(x)$  в виде  $\frac{Cx}{\sqrt{\ln x}}$ .

Для этого оценим интеграл в (19):

$$\int_0^{\infty} \frac{H_0(\xi) G_0(\xi)}{\xi + x} d\xi = \int_0^1 \frac{\xi H_0 G_0}{\xi + x} d\xi + \int_1^{\infty} \frac{\xi H_0 G_0}{\xi + x} d\xi.$$

Сразу ясно, что при  $x \rightarrow \infty$   $\int_0^1 \frac{\xi H_0 G_0}{\xi + x} d\xi \sim \frac{1}{x}$ , тогда как

\* Значение  $\tau_0=20$  соответствует длине пробега  $\sim 50$  1/см<sup>2</sup>, на которой быстрые протоны, движущиеся в плазме вдоль направления магнитного поля, останавливаются за счет ядерных столкновений; подробнее см. [2].

\*\* Автор выражает благодарность В. В. Иванову, указавшему на наличие данной асимптотики и предложившему ее краткий вывод, изложенный ниже.

$$\int_1^{\infty} \frac{\xi_0 H_0 G_0}{\xi + x} d\xi \sim \frac{3C}{2} \int_1^{\infty} \frac{dV \sqrt{\ln \xi}}{\xi + x} = \frac{3C}{2} \int_1^{\infty} \frac{V \sqrt{\ln \xi}}{(x + \xi)^2} d\xi =$$

$$= \frac{3C}{2x} \int_{1/x}^{\infty} \frac{V \sqrt{\ln x + \ln t}}{(1+t)^2} dt \sim \frac{3C}{2} \frac{V \sqrt{\ln x}}{x}.$$

Подставляя этот результат в (19), убеждаемся в справедливости (27). Отметим, что из (27) следует, что  $\lim_{z \rightarrow 0} z_1(z) = +\infty$ .

Функция  $H_0(x)$  была рассчитана численно. При этом использовалось интегральное представление [4]:

$$H_0(x) = \exp \left\{ -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\ln [1 - V_0(\xi/x)]}{1 + \xi^2} d\xi \right\},$$

где

$$V_0(u) = \int_0^{\infty} \frac{G_0(\xi)}{1 + u^2 \xi^2} d\xi.$$

Рассчитанные значения  $H_0(x)$  в широком интервале изменения  $x$  приведены в табл. 1. В интервале  $5 \lesssim x \lesssim 10^4$  результаты расчетов можно представить с точностью  $\sim 1\%$  в виде аппроксимационной формулы

$$H_0(x) \simeq 1.625 x (\ln x)^{-0.645}. \quad (28)$$

Для сравнения приведем асимптотики хорошо изученных  $H$ -функций:

$$H_A(x) \sim \sqrt{3} x; \quad H_D(x) \sim 2\pi^{-1/4} x^{1/2} (\ln x)^{1/4}; \quad H_L(x) \sim \left(\frac{9}{2}\right)^{1/4} x^{1/4}.$$

Следствием того, что  $\lim_{x \rightarrow \infty} H_0(x)/x = 0$ , является своеобразная качественная особенность диаграммы направленности (26): в центре „карандаша“ присутствует „дырка“, поскольку  $\lim_{\mu \rightarrow 1} I(0, \mu) = 0$  (см. рис. 1).

Полуширина „дырки“  $\theta_h \sim 1/\sqrt{x_h}$ , где  $H_0(x_h)/x_h \sim (1/2) H_0(\tau)/\tau_0$ . Численные расчеты показывают, что „дырка“ довольно узка: при  $\tau_0 = 20$  ее полуширина  $\theta_h \sim 30'$ .

Наряду с направленностью выходящего излучения, значительный интерес представляет распределение плотности лучистой энергии  $\varepsilon_r$  ( $\tau$ ) в атмосфере.

Таблица 1

$\ln(20x)$	$x$	$H_0(x)$	$\ln(20x)$	$x$	$H_0(x)$
0	0.05	1.144	5.0	7.421	7.69
0.2	0.06107	1.168	5.2	9.064	8.86
0.4	0.07459	1.196	5.4	11.07	10.2
0.6	0.09111	1.229	5.6	13.52	11.9
0.8	0.1113	1.268	5.8	16.51	13.8
1.0	0.1359	1.312	6.0	20.17	16.1
1.2	0.1660	1.364	6.2	24.64	18.9
1.4	0.2028	1.424	6.4	30.09	22.1
1.6	0.2477	1.493	6.6	36.75	26.0
1.8	0.3025	1.574	6.8	44.89	30.6
2.0	0.3695	1.668	7.0	54.83	36.2
2.2	0.4513	1.776	7.2	66.97	42.8
2.4	0.5512	1.903	7.4	81.80	50.7
2.6	0.6732	2.050	7.6	99.91	60.2
2.8	0.8222	2.221	7.8	122.0	71.5
3.0	1.004	2.42	8.0	149.0	85.1
3.2	1.227	2.65	8.2	182.0	101
3.4	1.498	2.92	8.4	222.4	121
3.6	1.830	3.24	8.6	271.6	144
3.8	2.235	3.61	8.8	331.7	172
4.0	2.730	4.05	9.0	405.2	206
4.2	3.334	4.56	9.2	494.9	247
4.4	4.073	5.16	9.4	604.4	296
4.6	4.974	5.87	9.6	738.2	355
4.8	6.076	6.71	9.8	901.7	425
			10.0	1101	510

Плотность лучистой энергии  $\varepsilon_r(\tau) = \frac{4\pi}{c} J(\tau)$ , где  $J(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} I(\tau, \mu) d\mu$  — усредненная по углам интенсивность. Однако, в отличие от обычного мо-

похроматического рассеяния, в данном случае отсутствует локальная связь между  $J(\tau)$  и  $S(\tau)$ ; функция  $S(\tau)$  локально связана лишь с  $L(\tau)$  — интенсивностью, усредненной по углам с весом  $(1 - \mu^2) = \sin^2 \theta$ . Ограничиваясь приближенными оценками  $\varepsilon_r(\tau)$ , мы положим  $\varepsilon_r(\tau) \simeq (4\pi/c) L(\tau)$  (аналог эддингтоновского приближения). Отметим, что если  $I(\tau, \mu)$  изотропна, то  $J(\tau) = L(\tau)$ ; с другой стороны, численные оценки для  $I(0, \mu)$  вида (26) при  $\tau_0 = 20$  показывают, что на внешней границе атмосферы  $\tau = 0$ , где поле излучения обладает максимальной анизотропией,  $L(0)$  отличается от  $J(0)$  всего на 25%.

Функция  $L(\tau) = S(\tau) + (3/8) dF(\tau)/d\tau$  выражается через резольвентную функцию  $\Phi_0(\tau)$ : а) при постоянном потоке  $F(\tau) = F$ ,

$$L(\tau) = L(0) \left[ 1 + \int_0^\tau \Phi_0(t) dt \right]; \quad (29)$$

б) при экспоненциальном распределении источников энергии  $F(\tau) = Fe^{-\tau/\tau_0}$ ,

$$L(\tau) = \frac{3}{8} \frac{F}{\tau_0} \left\{ [H_0(\tau_0) - 1] e^{-\tau/\tau_0} + H_0(\tau_0) \int_0^\tau \Phi_0(t) \exp\left(-\frac{\tau-t}{\tau_0}\right) dt \right\}. \quad (30)$$

Выражения (29) и (30) представляют собой частный случай (23) и (25). Из (27) и (17) нетрудно показать, что при  $\tau \gg 1$

$$\Phi_0(\tau) \sim \frac{2}{\sqrt{3 \ln \tau}}. \quad (31)$$

Отсюда следует, что при экспоненциальном распределении первичных источников  $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \varepsilon_r(\tau) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} L(\tau) = 0$ . Для сравнения напомним, что в случае обычного монохроматического консервативного рассеяния

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} J(\tau) = \frac{\sqrt{3}}{4} FH_s(\tau_0).$$

При численных оценках  $\varepsilon_r(\tau)$  вместо (29) и (30) удобнее воспользоваться более простыми приближенными выражениями, основанными на соотношении

$$I(0, \mu) = \frac{1-\mu^2}{\mu} \int_0^\infty S(t) \exp\left[-\frac{t}{\mu}(1-\mu^2)\right] dt \simeq S\left(\frac{\mu}{1-\mu^2}\right). \quad (32)$$



Отметим, что (32) есть точное равенство в том случае, когда  $S(\tau) = a + b\tau$ . Таким образом, мы вправе ожидать, что (32) даст хорошее приближение к действительности там, где  $S(\tau)$  мало отличается от линейной функции. Из (32) и (24), (26) сразу имеем:

$$L(\tau) \approx \begin{cases} L(0) H_0(\tau), & \text{когда } F(\tau) = \text{const}; \\ \frac{3}{8} F \left[ \frac{H_0(\tau_0) H_0(\tau)}{\tau + \tau_0} - \frac{e^{-\tau/\tau_0}}{\tau_0} \right], & \text{когда } F(\tau) = F e^{-\tau/\tau_0}. \end{cases} \quad (33)$$

Функция  $\varepsilon_r(\tau)$ , рассчитанная согласно (33) для случая  $F(\tau) = F e^{-\tau/\tau_0}$ , приведена на рис. 2. Для сравнения приведено также распределение плотности лучистой энергии в случае обычного консервативного рассеяния, рас-

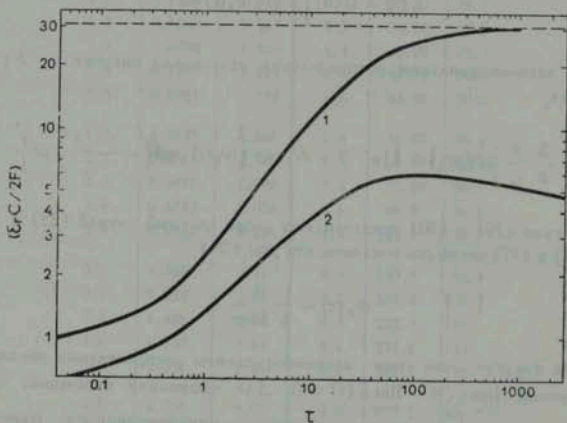


Рис. 2. Плотность лучистой энергии  $\varepsilon_r(\tau)$  (нормированная на  $2\pi F/c$ ) как функция оптической толщи при экспоненциальном распределении первичных источников в двух предельных случаях: 1) сечение рассеяния изотропно; 2) сечение рассеяния имеет вид (2).

считанное согласно выражению, аналогичному (33). Из рис. 2 видно, что приближение (32) должно быть очень хорошим при  $\tau \ll \tau_0$  и при  $\tau \gg \tau_0$ .

Отметим, что приближение (33) эквивалентно следующей качественной картине переноса излучения в атмосфере с сечениями вида (1)—(2): наблюдатель, который смотрит на атмосферу под углом  $\theta$ , эффективно ви-

дит слой  $\tau \sim c_0 s \theta / \sin^2 \theta$ , следовательно интенсивность воспринимаемого им излучения  $I(\sigma, \mu)$  пропорциональна плотности лучистой энергии на этой глубине.

Автор выражает глубокую признательность Р. А. Сюняеву и Ю. Н. Гнедину за постановку задачи и многочисленные обсуждения.

Институт космических исследований  
АН СССР

## RADIATIVE TRANSFER IN THE PLANE-PARALLEL ATMOSPHERE WITH A STRONG MAGNETIC FIELD

M. M. BASKO

In a strong magnetic field the cross-sections of elementary processes of interaction between radiation and matter depend on the angle between the field direction and the direction of electromagnetic wave propagation. In this case for the solution of transfer equation the technique can be applied which had been developed for the problems of radiative transfer in lines. Two specific distributions of primary sources, the constant radiative flux and the exponential distribution in the plane — parallel atmosphere are treated in detail. The angular distribution of emergent radiation and the distribution of radiative energy density over the atmosphere are expressed in terms of Chandrasekhar  $H$ -function.  $H$ -function is calculated in the limit  $\nu/\nu_H \rightarrow 0$  of an extremely strong magnetic field. Here  $\nu_H = eH/2\pi m_e c$  is the electron gyrofrequency.

### ЛИТЕРАТУРА

1. V. Canuto, J. Lodenquai, M. Ruderman, Phys. Rev. D., 3, 2303, 1971.
2. М. М. Баско, Р. А. Сюняев, Astron. Astrophys., 42, 331, 1975.
3. Ю. Н. Гнедин, Р. А. Сюняев, ЖЭТФ, 65, 102, 1973.
4. В. В. Иванов, Перенос излучения и спектры небесных тел, Наука, М., 1969.