

УДК 533.932

ДИФфуЗИОННОЕ ОПИСАНИЕ ПЕРЕНОСА ЭНЕРГИИ
ЗАРЯЖЕННЫМИ ПРОДУКТАМИ ТЕРМОЯДЕРНЫХ РЕАКЦИЙ

БАСКО М. М.

1. Введение

Энергия термоядерного синтеза высвобождается в виде быстрых частиц — ядер легких элементов (^3H , ^3He , ^4He и т. п.) и нейтронов, пробеги которых в типичной термоядерной плазме существенно превышают характерные микроскопические масштабы [1]. В соответствии с этим при математическом моделировании процессов, включающих распространение термоядерного пламени, необходимо учитывать, что энергия горения выделяется нелокально. Другими словами, наряду с обычными механизмами передачи энергии за счет электронной теплопроводности и распространения ударных волн необходимо адекватно описывать перенос энергии быстрыми продуктами реакций синтеза [2].

Существуют разные способы описания переноса энергии быстрыми заряженными частицами. Наиболее строгий и прямолинейный метод — численное решение уравнений кинетики для быстрых частиц [3–5]. Этот метод, однако, трудно совместить с динамическими расчетами термоядерных мишеней, поскольку он требует очень больших ресурсов ЭВМ. Авторами [6] предложено использовать приближение вперед-назад, которое позволяет значительно упростить процесс решения исходных уравнений кинетики. Данная работа посвящена наиболее «экономному» из приближенных методов описания переноса энергии заряженными продуктами ядерных реакций — диффузионному. Преимущество диффузионного метода состоит в том, что уравнения гидродинамики с теплопроводностью уже содержат диффузионные члены, и добавление к ним еще нескольких уравнений диффузии не является принципиальным усложнением с точки зрения численных расчетов.

Уравнение диффузии для заряженных продуктов ядерных реакций уже обсуждалось в [7–10]. В [8, 10] на примере статических конфигураций и стационарных волн горения показано, что по точности оно не уступает приближению вперед-назад. По сравнению с [7, 9] данная работа содержит следующие новые элементы: 1) в приближении прямолинейных траекторий получены общие выражения для коэффициентов диффузии D и диссипации G , справедливые для произвольной зависимости силы динамического трения $F(E)$ от энергии быстрых частиц E ; 2) исходя из общих выражений для коэффициентов D и G выписаны явные аппроксимационные формулы, позволяющие с точностью $\sim 20\%$ оценить значения последних при любых представляющих практический и теоретический интерес значениях температуры и плотности дейтерий-тритиевой плазмы; 3) выписано правильное обобщение уравнения диффузии для плотности энергии быстрых частиц на случай движущейся плазмы, совместимое с уравнениями гидродинамики; 4) показано, как диффузионное приближение может быть редуцировано к более грубому приближению α -теплопроводности, и приведены формулы для оценки соответствующей добавки к коэффициенту теплопроводности плазмы.

Ниже предполагается, что быстрые частицы-продукты рождаются в реакциях термоядерного синтеза с начальной энергией $E_0 = \frac{1}{2}Mv_0^2$ и изотроп-

ным распределением начальных скоростей в системе покоя термоядерной плазмы. Плазма для простоты предполагается состоящей из ионов одного сорта. В общем случае температуры электронов T_e и ионов T_i считаются различными.

2. Уравнение диффузии для плотности энергии быстрых частиц

Рассмотрим сначала простейший случай, когда среда (термоядерная плазма) покоится. Пусть $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$ — функция распределения быстрых заряженных частиц-продуктов в фазовом пространстве (\mathbf{x}, \mathbf{v}) (\mathbf{v} — скорость быстрых частиц, M и $E = \frac{1}{2}Mv^2$ — их масса и энергия, $v = |\mathbf{v}|$). В приближении прямолинейных траекторий функция f подчиняется уравнению непрерывности

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \left[-\frac{\partial}{\partial x_i} (v_i f) + \frac{\partial}{\partial v_i} \left(\frac{F_i}{M} f \right) \right] = \frac{q}{4\pi v_0^2} \delta(v - v_0), \quad (1)$$

где $\mathbf{F} = -(\mathbf{v}/v)\mathbf{F}(t, \mathbf{x}, v)$ сила динамического трения, тормозящая быстрые частицы, $q = q(t, \mathbf{x})$ [$\text{см}^{-3} \cdot \text{с}^{-1}$] — скорость рождения быстрых частиц в реакциях термоядерного синтеза (известная функция полной температуры, плотности и ядерного состава плазмы). Уравнение (1) является по сути уравнением Фоккера — Планка, в котором учтено лишь динамическое трение и отброшен член, описывающий диффузию по скоростям.

Из (1) с помощью стандартных преобразований (см. [8, 9]) можно получить следующее уравнение диффузии:

$$\frac{\partial W}{\partial t} - \text{div}(D \nabla W) + GW = qE_0 \quad (2)$$

для плотности энергии быстрых частиц

$$W = \int E f d^3\mathbf{v}. \quad (3)$$

В уравнение (2) входят два кинетических коэффициента — коэффициент диффузии D и коэффициент релаксации G (по порядку величины $D \sim lv_0$, $G \sim v_0/l$, где l — длина свободного пробега быстрых частиц), которые в рамках обычных допущений диффузионного приближения должны быть вычислены исходя из соотношений

$$\int (\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}) f d^3\mathbf{v} = -GW, \quad (4)$$

$$\int \mathbf{F} f d^3\mathbf{v} = \frac{2}{3} \nabla W = -\frac{2}{3D} \int \mathbf{v} E f d^3\mathbf{v}. \quad (5)$$

Диффузионное уравнение (2) является хорошим приближением к исходному уравнению переноса (1) в пределе

$$l \ll L = \min \left\{ |\nabla \ln q|^{-1}, |\nabla \ln F|^{-1}, v_0 \left| \frac{\partial \ln q}{\partial t} \right|^{-1}, v_0 \left| \frac{\partial \ln F}{\partial t} \right|^{-1} \right\} \quad (6)$$

когда функции $q(t, \mathbf{x})$, $F(t, \mathbf{x})$ слабо меняются на расстояниях $\sim l$ и временах $\sim l/v_0$; в этом же пределе коэффициенты G и D , определенные соотношениями (4), (5), становятся локальными функциями температуры и плотности плазмы.

Уравнение (2) нетрудно обобщить на случай произвольных нерелятивистских движений среды. Прежде всего заметим, что, согласно (5), плотность объемных сил, действующих со стороны быстрых частиц на среду, в диффузионном приближении есть $-2/3 \nabla W$. Последнее означает, что быстрые частицы можно считать газом, давление которого $p = 2/3 W$. Уравнение энергии для такого газа, движущегося вместе со средой со скоростью $\mathbf{u} =$

$=\mathbf{u}(l, \mathbf{x})$, которое в случае $\mathbf{u}=0$ сводится к (2), имеет вид

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla W + \frac{5}{3} W \operatorname{div} \mathbf{u} - \operatorname{div}(D \nabla W) + G W = q E_0. \quad (7)$$

Здесь W — объемная плотность энергии быстрых частиц в сопутствующей системе координат, где рассматриваемый элемент среды в данный момент покоится.

Уравнение (7) должно решаться в совокупности с уравнениями динамики среды, которые должны быть совместимы с (7). В простейшем случае одножидкостной однотемпературной гидродинамики без вязкости и теплопроводности эти уравнения сводятся к

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (8)$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla \left(p + \frac{2}{3} W \right) = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \varepsilon) + \mathbf{u} \cdot \nabla(\rho \varepsilon) + (p + \rho \varepsilon) \operatorname{div} \mathbf{u} = G W. \quad (10)$$

Здесь ρ , p и ε — соответственно плотность массы, давление и массовая плотность внутренней энергии жидкости (плазмы). Совместимость системы уравнений (7)–(10) означает, что в отсутствие источников ($q=0$) ее прямым следствием является закон сохранения полной энергии, объемная плотность которой в лабораторной системе координат дается выражением

$$W_{\text{tot}} = \rho \left(\varepsilon + \frac{u^2}{2} \right) + W. \quad (11)$$

Отметим, что уравнение (26) авторов [9], аналогичное выписанному выше уравнению (7), содержит ошибку (перед членом $\mathbf{u} \cdot \nabla W$ не должно быть множителя $5/3$) и несовместимо с уравнениями гидродинамики (8)–(10).

В более общем случае двухтемпературной плазмы, когда уравнение энергии (10) расщепляется на два уравнения для плотности энергии электронов ε_e и ионов ε_i ($\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_i$) [11], аналогичным образом расщепляется и скорость нагрева плазмы:

$$G_e W = \frac{k_e}{k_e + k_i} G W, \quad G_i W = \frac{k_i}{k_e + k_i} G W. \quad (12)$$

Здесь k_e и k_i — электронная и ионная составляющие полного коэффициента поглощения $k = k_e + k_i$, отвечающие соответственно первому и второму слагаемым в правой части (25) (см. ниже). В интервале $0,1 \text{ кэВ} \leq T_e \leq 300 \text{ кэВ}$, $10^8 \text{ г/см}^3 \leq \rho \leq 10^9 \text{ г/см}^3$ отношение k_e/k для дейтерий-тритиевой плазмы может быть с разумной точностью (ошибка $\approx 20\%$) аппроксимировано выражением [12]

$$\frac{k_e}{k_e + k_i} \approx \frac{T}{T_e + T_i}. \quad (13)$$

Значения температуры T_e для основных продуктов реакций DD-цикла приведены в таблице.

Если имеется несколько сортов быстрых заряженных частиц, то для плотности энергии W_j каждого сорта j необходимо написать свое уравнение диффузии вида (7) (со своими коэффициентами диффузии D_j , G_j и источником $q_j E_0$): при этом в (9) и (10) необходимо учесть суммарные вклады от всех сортов: $2/3 W \rightarrow 2/3 \sum_j W_j$, $G W \rightarrow \sum_j G_j W_j$.

3. Коэффициенты диффузии и диссипация энергии быстрых частиц

Чтобы из (4) вычислить коэффициент диссипации $G = G(\rho, T_e, T_i)$, достаточно воспользоваться стационарным квазиоднородным решением

$$f^{(0)} = \frac{qM}{4\pi v^2 F}, \quad 0 \leq v \leq v_0 \quad (14)$$

уравнения (1), справедливым в нулевом порядке по параметру неоднородности l/L . Подставляя (14) в (4), получаем

$$G = av_0 k, \quad (15)$$

где безразмерный коэффициент a и коэффициент поглощения k (имеющий размерность обратной длины) определяются соотношениями

$$a = \left[\int_0^{v_0} \left(\frac{E}{E_0} \right)^{3/2} \frac{F_0}{F} \frac{dE}{E_0} \right]^{-1}, \quad (16a)$$

$$k = \frac{F_0}{E_0}. \quad (16b)$$

Здесь и ниже подразумевается $F = F(\rho, T_e, T_i, E)$, $F_0 = F_0(\rho, T_e, T_i) = F(\rho, T_e, T_i, E_0)$.

Для нахождения коэффициента диффузии D необходимо вычислить малую анизотропную добавку $f^{(1)}$ к изотропному решению $f^{(0)}$. В стационарном случае ($\partial/\partial t = 0$) в дипольном приближении из (1) имеем

$$f^{(1)} = -v \cdot \left\{ \frac{M^2}{4\pi v^2 F} \int_0^{v_0} \nabla \left[\frac{q}{F(v')} \right] v' dv' \right\}. \quad (17)$$

Чтобы из (5) и (17) получить локальное выражение для коэффициента D , зависящее от температуры и плотности плазмы, но не от их градиентов, необходимо в дополнение к (6) сделать еще одно упрощающее предположение

$$F(\rho, T_e, T_i, E) = F_0(\rho, T_e, T_i) \psi \left(\frac{E}{E_0} \right), \quad (18)$$

которое справедливо при условии

$$L' = |\nabla \ln(F/F_0)|^{-1} \gg L. \quad (19)$$

На практике условие (19) выполняется с удовлетворительной точностью, поскольку сильные изменения температуры и плотности плазмы довольно слабо отражаются на функциональном виде зависимости $F(E)$. Подставляя (17), (18) в (5), получаем

$$D = b \frac{v_0}{k}, \quad (20)$$

где безразмерный коэффициент b определяется выражением

$$b = \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{v}{\varphi(v)} \left[\int_0^1 \frac{dv'}{\varphi(v')} \right] dv / \int_0^1 \frac{\bar{v} dv}{\varphi(v)}. \quad (21)$$

Особого внимания заслуживает частный случай

$$\varphi(v) = v^2, \quad (22)$$

Частица	E_0 , МэВ	c_1	c_2	c_3	T_8 , кэВ
^4He	3,52	$2,2 \cdot 10^{-3}$	$5,7 \cdot 10^{-4}$	0,077	22
^3He	0,82	$2,5 \cdot 10^{-3}$	$8,9 \cdot 10^{-4}$	0,157	5,6
^3H	1,01	$2,5 \cdot 10^{-3}$	$5,6 \cdot 10^{-4}$	0,112	7,0
^1H	3,02	$2,6 \cdot 10^{-3}$	$5,0 \cdot 10^{-4}$	0,120	67
^2H	14,68	$2,4 \cdot 10^{-3}$	$4,4 \cdot 10^{-4}$	0,130	390

для которого из (16а) и (21) получаем

$$a = \frac{3}{2} - n, \quad (23a)$$

$$b = \frac{1}{3+6a}. \quad (23б)$$

Несложный анализ общего выражения (см., например, [13]) для силы торможения быстрых заряженных частиц в плазме показывает, что показатель n изменяется в пределах $-1 < n < 1/2$, а безразмерные коэффициенты a и b — в пределах $1 < a < 3/2$, $1/18 < b < 1/9$. При этом численное значение безразмерной комбинации

$$v_0^{-2} DG = a/(3+6a) \quad (24)$$

изменяется в очень узком интервале — от $1/9$ до $3/36$. Последний факт можно интерпретировать как еще один довод в пользу того, что упрощающее предположение (18) вносит сравнительно небольшую погрешность в значения коэффициента диффузии ($\approx 20\%$), и на практике для вычисления значений D и G достаточно простых формул (15), (16) и (24).

Коэффициент поглощения k в общем случае термоядерной плазмы можно оценить по формуле [14]

$$k = \frac{4\pi e^4 Z^2}{E_0 v_0^2} \left[\frac{n_e}{m_e} \Phi(x_e) L_{je} + \frac{n_i}{m_i} z_i^2 \sqrt{1+m_i/M} L_{ji} \right], \quad (25)$$

учитывающей торможение на свободных электронах и ионах плазмы. Здесь

$$x_e^2 = \frac{m_e v_0^2}{2} \left[T_e^2 + \left(2^{1/2} \pi \frac{\hbar^2}{m_e} n_e^{1/3} \right)^2 \right]^{-1/2}, \quad (26)$$

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[\int_0^x \exp(-t^2) dt - x \exp(-x^2) \right] \approx x^2/(x^2+1.33), \quad (27)$$

m_e , $-e$, n_e — масса, заряд и плотность свободных электронов, m_i , $+ez_i$, n_i — масса, заряд и плотность ионов, $+eZ$ — заряд быстрых частиц. Подробные формулы для кулоновских логарифмов L_{je} и L_{ji} приведены в [14]. Безразмерный коэффициент a для дейтерий-тритиевой плазмы (при произвольном процентном содержании трития) можно с хорошей точностью аппроксимировать выражением

$$a \approx \frac{5}{2} - \frac{3}{2} \left[1 + \frac{c_1}{c_2 + x_e^3} + c_3 x_e^3 \right]^{-1}. \quad (28)$$

Сводка значений подгоночных коэффициентов c_1 , c_2 и c_3 для пяти сортов заряженных продуктов реакций DD-цикла приведена в таблице. В диапазоне $10^{-2} \text{ г/см}^3 \leq \rho \leq 10^4 \text{ г/см}^3$, $0,01 \text{ кэВ} \leq T_e \leq 150 \text{ кэВ}$ типичная погрешность формулы (28) $\delta \leq 10\%$, а максимальная ошибка $\delta_{\max} < 20\%$.

4. Приближение α -теплопроводности

Если последовательно придерживаться приближения слабых градиентов (6), то можно заметить, что первый и второй члены в уравнении диффузии (2) имеют соответственно порядок малости l/L и $(l/L)^2$ по сравнению с GW . Тогда, решая (2) методом последовательных приближе-

вий относительно малого параметра l/L и сохраняя лишь первые несчитающиеся члены, содержащие производные по времени и пространству, получим следующее приближенное выражение для скорости диссипации термоядерной энергии:

$$GW = qE_0 + \operatorname{div} \left[D \nabla \left(\frac{qE_0}{G} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{qE_0}{G} \right). \quad (29)$$

Это выражение можно подставить в правую часть гидродинамического уравнения (10). При этом, ограничиваясь минимальным усложнением (10), требуемым для описания нелокального характера выделения термоядерной энергии, обычно сохраняют первые два слагаемых в правой части (29) и пренебрегают последним членом, содержащим производную по времени. Учитывая далее, что пространственное изменение величины qE_0/G в основном обусловлено крутой зависимостью скорости термоядерной реакции q от температуры T_i , и полагая в первом приближении [15]

$$q(T_i) \sim \exp \left[- \left(\frac{E_q}{T_i} \right)^{3/2} \right], \quad (30)$$

преобразуем (29) к виду

$$GW = qE_0 + \operatorname{div}(\alpha_a \nabla T_i) \quad (31)$$

где

$$\alpha_a = \frac{1}{3} q \frac{D}{G} \frac{E_0}{T_i} \left(\frac{E_q}{T_i} \right)^{3/2}. \quad (32)$$

Подставляя (31) в (10), видим, что нелокальное выделение термоядерной энергии можно приближенно описать в рамках обычной теплопроводности: для этого достаточно в полном выражении для коэффициента теплопроводности учесть аддитивную добавку (32). В случае двухтемпературной плазмы скорость нагрева (31) расщепляется на две компоненты в соответствии с формулой (12).

5. Заключение

Формально диффузионное приближение применимо при условии (6). Однако, как это хорошо известно из теории переноса излучения и нейтронов, его фактическая область применимости гораздо шире. Если отвлечься от ошибок $\sim 10-20\%$ и далеких экспоненциально малых хвостов, то уравнения (2), (7) дают хорошие результаты и в случае как угодно крутых градиентов [8, 10]. Более того, уравнение (7) позволяет описать перенос энергии быстрыми (нерелятивистскими) продуктами ядерных реакций и тогда, когда нельзя использовать приближение Фоккера — Планка (как это имеет место, например, для нейтронов): вопрос при этом упирается лишь в вычисление коэффициентов D и G .

И лишь в тех случаях, когда пробег быстрых частиц l существенно превышает размеры термоядерной плазмы, уравнения (2), (7) заведомо неприменимы. Так, доля энергии $\eta \sim R/l$, оставляемая быстрыми частицами в однородной сфере радиуса $R \ll l$, согласно (2) $\eta \sim (R/l)^2$ (погрешность диффузионного приближения в этом случае превосходит 20% при $R \leq 0.15 l$). Другими словами, если характерный размер области термоядерного горения $2R \geq 0.3l$, перенос энергии быстрыми заряженными продуктами вполне адекватно описывается уравнением (7).

В заключение отметим, что, хотя формально приближение α -теплопроводности (31) применимо тогда же, когда и диффузионное, оно все-таки гораздо грубее: его погрешность, в частности, неограниченно растет с ростом градиента ионной температуры.

Автор признателен М. Д. Чуразову за ряд ценных указаний и полезных обсуждений.

Литература

1. Дюдерштадт Дж., Мозес Г. Инерциальный термоядерный синтез. М.: Энергоатомиздат, 1984.
2. Аврорин Е. Я., Феоктистов Л. П., Шибаршов Л. И. // Физика плазмы. 1980. Т. 6. С. 965.
3. Tzaji H., Katsurai M., Sekiguchi T., Nakano N. // Nucl. Fusion. 1976. V. 16. P. 287.
4. Кандиев Я. З., Крючков В. Б., Платой В. В. // Физика плазмы. 1979. Т. 5. С. 171.
5. Иванов М. Ф., Швец В. Ф. // Докл. АН СССР. 1978. Т. 238. С. 1324.
6. Гуськов С. Ю., Роланов В. Б. // Теория нагрева и сжатия низкотемпературных термоядерных мишеней. Тр. ФИАН. М.: Наука, 1982. Т. 134. С. 115.
7. Asano N., Nishihara K., Nozaki K., Taniuti T. // J. Phys. Soc. Japan. 1976. V. 41. P. 1774.
8. Баско М. М. Препринт № 23. М.: ИТЭФ, 1981.
9. Liberman M. A., Velikovich A. L. // J. Plasma Phys. 1984. V. 31. Pt. 3. P. 369.
10. Баско М. М., Будько А. Б. Препринт № 28. М.: ИТЭФ, 1986.
11. Брагинский С. И. // Вопросы теории плазмы/Под ред. Леоновича М. А. Вып. 1. М.: Госатомиздат. 1963.
12. Chu M. S. // Phys. Fluids. 1972. V. 15. P. 413.
13. Кролл Н., Трайвеллис А. Основы физики плазмы. М.: Мир, 1975. Гл. 6. § 4.
14. Баско М. М. // Физика плазмы. 1984. Т. 10. С. 1195.
15. Арцимович Л. А. Управляемые термоядерные реакции. М.: Физматгиз, 1960. С. 14.

Институт теоретической
и экспериментальной физики

Поступила в редакцию
19.V.1986
Исправленный вариант
получен 5.IX.1986