

УДК 519.6:532.5

© 1990 г.

М. М. БАСКО

(Москва)

### МЕТОД ИСКУССТВЕННОЙ ВЯЗКОСТИ РАСЧЕТА ОДНОМЕРНЫХ ТЕЧЕНИЙ

Предложено обобщение тензорной искусственной вязкости, применявшейся ранее лишь в сферических течениях, на любой из трех типов одномерных течений — плоских, цилиндрических и сферических. Выбор конкретных значений для шести свободных параметров рассмотренной искусственной вязкости достаточно общего вида проиллюстрирован на примере двух типов течений, часто встречающихся в прикладных задачах.

Одним из наиболее распространенных методов численного моделирования ударно-волновых течений в идеальной гидродинамике является введение искусственной вязкости (псевдовязкости) [1]. Классической стала квадратичная (по скорости) скалярная псевдовязкость, предложенная Нейманом и Рихтмайером [2]. Однако, хорошо описывая прохождение одиночных плоских ударных волн, псевдовязкость Неймана — Рихтмайера обладает рядом недостатков [3], наиболее существенными из которых с точки зрения приложений являются паразитный нагрев (генерация энтропии) при адиабатическом (в частности, гомологичном) сжатии и сильные энтропийные возмущения при отражении ударной волны от жесткой стенки или центра симметрии («нагрев стенки»). Ясно, что никакая модификация псевдовязких членов не позволит полностью избавиться от паразитных эффектов, но их можно попытаться подавить (или по крайней мере ослабить) в гидродинамических течениях определенных типов, важных с точки зрения приложений. С этой целью в данной работе рассмотрена искусственная вязкость достаточно общего вида, представляющая собой линейную комбинацию скалярного и тензорного слагаемых применительно к классу одномерных течений с неподвижным центром. В общем случае неподвижный центр присутствует лишь в сферически- и цилиндрически-симметричных течениях, тогда как в плоской геометрии тем самым выделяется некоторое подмножество из множества всех возможных одномерных течений.

#### § 1. Уравнения идеальной гидродинамики с искусственной вязкостью

В качестве отправной точки рассмотрим общий вид уравнения движения вязкой жидкости [4]

$$(1.1) \quad \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial P}{\partial x_i} = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}$$

где тензор вязких напряжений

$$(1.2) \quad \sigma_{ik} = \zeta_s \delta_{ik} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \zeta_t \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right)$$

(по повторяющимся индексам подразумевается суммирование). Первое слагаемое с коэффициентом  $\zeta_s$  в правой части (1.2) — скалярная вязкость, которую можно представить просто как добавку к давлению  $P$ , второе слагаемое с коэффициентом  $\zeta_t$  — тензорная вязкость с нулевым следом. Уравнение энергии вязкой жидкости имеет вид

$$(1.3) \quad \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \rho u_k \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} + P \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = \sigma_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}.$$

В случае сферически-симметричных течений уравнения (1.1)–(1.3) принимают вид

$$(1.4) \quad \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left[ P - \zeta_s \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u) \right] = \\ = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{4}{3} \zeta_t \Sigma \right),$$

$$(1.5) \quad \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \rho u \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} + \left[ P - \zeta_s \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u) \right] \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u) = \frac{4}{3} \zeta_t \Sigma^2,$$

где

$$(1.6) \quad \Sigma = \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} = r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u}{r} \right).$$

Из этих уравнений сразу видно, что, в отличие от скалярной, тензорная вязкость тождественно обращается в нуль при гомологичном сферическом сжатии и расширении, когда скорость  $u(t, r) = C(t)r$ . Последнее означает, что, перейдя от скалярной псевдовязкости Неймана — Рихтмайера к тензорной псевдовязкости (1.2) (см. [5]), удастся избавиться от паразитной генерации энтропии при гомологичном сферически-симметричном сжатии. Последнее обстоятельство имеет немаловажное значение в целом ряде прикладных задач.

Хорошо известно, однако, что уже при гомологичном цилиндрически-симметричном сжатии тензорная компонента физической вязкости (первая вязкость) в нуль не обращается и тем более этого не происходит при гомологичном плоскопараллельном движении. Тем не менее хотелось бы сконструировать такую псевдовязкость, которая обращалась бы в нуль тождественно на гомологичных одномерных течениях в любой из трех геометрий. С этой целью в данной работе предлагается следующее обобщение уравнений (1.4), (1.5) (совместно с уравнением баланса массы) на одномерные течения в произвольной геометрии:

$$(1.7) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^v} \frac{\partial}{\partial r} (r^v u \rho) = 0,$$

$$(1.8) \quad \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left[ P - \eta_s \frac{1}{r^v} \frac{\partial}{\partial r} (r^v u) \right] = \\ = \frac{1}{r^{v+1}} \frac{\partial}{\partial r} (r^{v+1} \eta_t \Sigma),$$

$$(1.9) \quad \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \rho u \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} + \left[ P - \eta, \frac{1}{r^v} \frac{\partial}{\partial r} (r^v u) \right] \frac{1}{r^v} \frac{\partial}{\partial r} (r^v u) = \eta_t \Sigma^2;$$

величина  $\Sigma$  определяется соотношением (1.6).

В сферическом случае ( $v=2$ ) уравнения (1.8), (1.9) отличаются от «физических» уравнений (1.1)–(1.3) лишь нормировкой коэффициента тензорной вязкости,  $\eta_t = 4\xi_t/3$ . Однако чтобы в цилиндрической геометрии ( $v=1$ ) из физических уравнений (1.1)–(1.3) получить (1.8), (1.9), необходимо произвести замену  $\xi_t = \eta_t$ ,  $\xi_r = -\eta_t/3 + \eta_r$ . Последнее означает, что в цилиндрическом случае уравнения (1.8), (1.9) физически корректны лишь при условии  $\eta_r \geq \eta_t/3$ . Другими словами, если предположить, что существует жидкость, цилиндрические движения которой описываются уравнениями (1.7)–(1.9) при  $v=1$ ,  $\eta_r = 0$ ,  $\eta_t > 0$ , то в более широком классе течений будут существовать такие нецилиндрические движения этой жидкости, при которых вязкая диссипация механической энергии будет сопровождаться убыванием энтропии. В плоской геометрии ( $v=0$ ) уравнения (1.8), (1.9) вообще нельзя получить из физических уравнений (1.1)–(1.3).

Тем не менее совершенно ясно, что если три типа одномерных движений — сферические, цилиндрические и плоские — рассматривать совершенно изолированно друг от друга и от других, более широких классов течений, то уравнения (1.7)–(1.9) термодинамически вполне корректны при любых  $\eta_r \geq 0$ ,  $\eta_t \geq 0$ . При этом введенную в правых частях уравнений (1.8) и (1.9) вязкость с коэффициентом  $\eta_t$  в строгом смысле уже нельзя называть тензорной вязкостью, и поэтому введем для нее термин  $t$ -вязкость. Основное свойство  $t$ -вязкости — тождественное обращение в нуль на гомологичных течениях, когда  $u = C(t)r$ . В плоской геометрии использование искусственной  $t$ -вязкости оправдано лишь на классе течений с неподвижным центром  $r=0$ . Выбор коэффициентов псевдовязкости  $\eta_r$  и  $\eta_t$  обсуждается в следующем параграфе.

## § 2. Конечно-разностная аппроксимация

Численное решение системы уравнений (1.7)–(1.9) проводилось по явной разностной схеме

$$(2.1) \quad \frac{\bar{r} - r}{\Delta t} = \frac{1}{2} (u + \bar{u}),$$

$$(2.2) \quad \frac{\bar{u} - u}{\Delta t} + 2\bar{r}^v \frac{P' - P'_-}{\Delta m + \Delta m_-} = \frac{2}{\bar{r}} \frac{\bar{\eta}_t \bar{\Sigma} - \eta_t \Sigma_-}{\Delta m + \Delta m_-},$$

$$(2.3) \quad \varepsilon_r \frac{\bar{T} - T}{\Delta t} + (P' + \varepsilon_r) \bar{V} = \bar{\eta}_t \bar{\Sigma}^2$$

относительно лагранжианной массовой координаты

$$m = \int_0^r \rho r^v dr.$$

Основные зависимые переменные  $r$ ,  $u$ ,  $T$ ; уравнение состояния предполагается заданным в виде  $P = P(V, T)$ ,  $\varepsilon = \varepsilon(V, T)$ ,  $\varepsilon_r = \partial \varepsilon / \partial T$ ,  $\varepsilon_v = \partial \varepsilon / \partial V$ ,  $V = 1/\rho$ . Предполагается также, что все величины в уравнениях (2.1)–(2.3) имеют временной индекс  $n$  и пространственный индекс  $j$ ; для крат-

кости использованы обозначения

$$f_i^n = f, \quad f_i^{n+1} = \bar{f}, \quad f_i^{n+1/2} = \tilde{f}, \quad f_{i+1}^n = f_+.$$

Величины  $m_j$ ,  $r_j$  и  $u_j$  центрированы на левый край  $j$ -го лагранжева интервала, при этом  $m_1 = r_1 = u_1 = 0$ . Величины  $T$ ,  $V$ ,  $\tilde{V}$ ,  $P$ ,  $P'$ ,  $\tilde{\eta}_j$ ,  $\tilde{\eta}_j$ ,  $\tilde{\Sigma}$  центрированы на середину  $j$ -го интервала. Уравнения (2.1)–(2.3) дополняются соотношениями

$$(2.4) \quad \tilde{r} = r + u \Delta t / 2,$$

$$(2.5) \quad P' = P - \tilde{\eta}_j \tilde{V},$$

$$(2.6) \quad \tilde{\Sigma} = \frac{1}{2\Delta m} \left( \frac{u_+ + \bar{u}_+}{\tilde{r}_+} - \frac{u + \bar{u}}{\tilde{r}} \right),$$

$$(2.7) \quad \tilde{V} = \frac{1}{2\Delta m} [(u_+ + \bar{u}_+) \tilde{r}_+^v - (u + \bar{u}) \tilde{r}^v].$$

Отметим, что с переходом от (1.8), (1.9) к (2.2), (2.3), были очевидным образом переобозначены величины  $\eta_s$ ,  $\eta_i$  и  $\Sigma$ . Соотношение (2.2) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений относительно  $\bar{u}_j$ , которая легко решается методом прогонки. Плотность (удельный объем) не является основной зависимой переменной и вычисляется из условия сохранения массы в каждом лагранжевом интервале:

$$\Delta m = m_+ - m = \frac{\rho}{v+1} (\tilde{r}_+^{v+1} - \tilde{r}^{v+1}).$$

Важное свойство разностной схемы (2.1)–(2.3) — консервативность по полной энергии при  $\varepsilon_T = \text{const}$ ,  $\varepsilon_v = 0$ . Действительно, если определить полную энергию лагранжева интервала  $\Delta E$  как

$$\Delta E = \varepsilon \Delta m + \begin{cases} 1/8 (\Delta m_1 + \Delta m_2) u_2^2, & j=1, \\ 1/8 [(\Delta m_- + \Delta m) u^2 + (\Delta m + \Delta m_+) u_+^2], & j=2, 3, \dots, N-1, \\ 1/8 (\Delta m_{N-1} + \Delta m_N) u_N^2 + 1/4 \Delta m_N u_{N+1}^2. & j=N, \end{cases}$$

то при  $\varepsilon_T = \text{const}$ ,  $\varepsilon_v = 0$  ее приращение на шаге по времени согласно (2.2), (2.3) представляется в дивергентном виде:

$$\frac{\overline{\Delta E} - \Delta E}{\Delta t} = F - F_+,$$

где

$$F = \begin{cases} 0, & j=1, \\ \frac{u + \bar{u}}{4} \left[ \tilde{r}^v (P_- + P') - \frac{1}{\tilde{r}} (\tilde{\eta}_j - \tilde{\Sigma}_- + \tilde{\eta}_j \tilde{\Sigma}) \right], & j=2, 3, \dots, N, \\ \frac{u_{N+1} + \bar{u}_{N+1}}{2} \tilde{r}_{N+1}^v P_+, & j=N+1, \end{cases}$$

соответствует потоку механической энергии через левую границу  $j$ -го интервала. Напомним, что, ограничившись классом течений с неподвижным центром  $r=0$ , мы предполагаем выполнение левого граничного условия  $u_1 = \bar{u}_1 = 0$  (в формуле (2.6) будет  $(u_1 + \bar{u}_1) / \tilde{r}_1 = 0$ ). При этом на правой границе  $P_{N+1} = P_+$  — граничное давление,  $\Delta m_{N+1} = \tilde{\eta}_{N, N+1} = \tilde{\eta}_{N+1, N+1} = 0$ .

В уравнениях (2.1)–(2.3), (2.5) фигурируют два независимых коэффициента искусственной вязкости  $\tilde{\eta}$ , и  $\tilde{\eta}_i$ . Для этих величин предложим

выражения

$$(2.8) \quad \bar{\eta}_s = \begin{cases} 0, & \Delta u \geq 0, \\ \frac{\rho \Delta m}{\langle \bar{r}^v \rangle} (\mu_{s1} u_s - \mu_{s2} \Delta u), & \Delta u < 0, \end{cases}$$

$$(2.9) \quad \bar{\eta}_t = \begin{cases} 0, & \Delta u \geq 0, \\ \rho \Delta m \langle \bar{r}^{v+2} \rangle (\mu_{t1} u_s - \mu_{t2} \Delta u), & \Delta u < 0, \end{cases}$$

где  $u_s$  — адиабатическая скорость звука, а для центрирования на середине интервала значений  $\bar{r}^v$  и  $\bar{r}^{v+2}$  используем линейную интерполяцию

$$(2.10) \quad \langle \bar{r}^v \rangle = (1 - \sigma_s) \bar{r}^v + \sigma_s \bar{r}_{+}^v,$$

$$(2.11) \quad \langle \bar{r}^{v+2} \rangle = (1 - \sigma_t) \bar{r}^{v+2} + \sigma_t \bar{r}_{+}^{v+2}.$$

Каждый из коэффициентов  $\bar{\eta}_s$  и  $\bar{\eta}_t$  представлен в виде линейной комбинации линейного по скорости газа (квадратичная псевдовязкость типа Неймана — Рихтмайера) и не зависящего от нее (линейная псевдовязкость) членов. При этом четыре безразмерных коэффициента  $\mu_{s1}$ ,  $\mu_{s2}$ ,  $\mu_{t1}$ ,  $\mu_{t2}$  представляют широкую возможность выбора наиболее подходящего варианта псевдовязкости для конкретного класса задач. Оба коэффициента  $\bar{\eta}_s$  и  $\bar{\eta}_t$  обращаются в нуль при расширении лагранжева интервала, когда  $u_+ \geq u$ . Отметим, что в цилиндрическом и сферическом случаях определенное таким образом расширение не всегда сопровождается уменьшением плотности  $\rho$ . Более простые не дивергентные формулы (2.8), (2.9) предпочтительнее более сложных дивергентных, поскольку на практике они не приводят к сколько-нибудь заметным различиям. И, наконец, масштабирование коэффициентов  $\bar{\eta}_s$ ,  $\bar{\eta}_t$  на  $\Delta m$ , а не на  $\Delta t$  выглядит более естественным в разностной схеме (2.1) — (2.3), ориентированной на равномерное разбиение по массовой координате  $m$ , и дает лучшие практические результаты.

Окончательно: предлагаемый в данной работе вариант искусственной вязкости содержит шесть свободных безразмерных параметров:  $\mu_{s1}$  — коэффициент линейной скалярной вязкости,  $\mu_{s2}$  — коэффициент квадратичной скалярной вязкости,  $\mu_{t1}$  — коэффициент линейной  $t$ -вязкости,  $\mu_{t2}$  — коэффициент квадратичной  $t$ -вязкости,  $0 < \sigma_s \leq 1$ ,  $0 \leq \sigma_t \leq 1$  — два свободных параметра аппроксимации.

### § 3. Численные примеры

Основная цель введения искусственной вязкости — правильно описать диссипацию кинетической энергии на фронтах ударных волн. В данном параграфе приведены результаты подбора коэффициентов введенной выше псевдовязкости для двух классов ударноволновых течений: А — отражение ударной волны от центра (оси или плоскости) симметрии; Б — отражение ударной волны от центра с последующей стадией сильного квазиадиабатического сжатия. Тестовые расчеты проводились для идеального газа с уравнением состояния

$$P = \rho T, \quad \varepsilon = T / (\gamma - 1)$$

на примере следующих аналитических решений.

Задача о поршне ( $v=0$ ). Начальное состояние — плоский слой газа с  $\gamma = 5/3$ ,

$$(3.1) \quad 0 \leq r \leq R_0 = 1, \quad \rho(0, r) = \rho_0 = 1, \quad T(0, r) = 0.$$

Начиная с момента  $t=0$  к правой границе приложено давление  $P_b(t) = P_1 = 3/4$ . При этом в интервале  $0 < t < t_1$  влево бежит сильная ударная волна со скоростью

$$D_1 = - \left( \frac{\gamma+1}{2} \frac{P_1}{\rho_0} \right)^{1/2} = -1;$$

отразившись от центра в момент  $t_1=1$ , ударная волна бежит вправо со скоростью

$$D_2 = -(\gamma-1)u_1 = -2 \frac{\gamma-1}{\gamma+1} D_1 = \frac{1}{2}.$$

Плотность и давление за фронтом отраженной ударной волны

$$\rho_2 = \frac{\gamma}{\gamma-1} \rho_1 = \frac{\gamma(\gamma+1)}{(\gamma-1)^2} \rho_0 = 10, \quad P_2 = \frac{3\gamma-1}{\gamma-1} P_1 = \frac{9}{2}.$$

Значения безразмерной энтропии

$$s = \frac{1}{\gamma-1} \ln T - \ln \rho$$

за фронтом падающей и отраженной ударных волн составляют  $s_1 = -3.89726$  и  $s_2 = -3.50035$ .

Решение Гудерля ( $\nu=1, 2$ ). Начальное состояние — цилиндр (сфера) идеального газа ( $\gamma=5/3$ ) с параметрами (3.1). Начиная с момента  $t=0$  к внешней границе приложено давление поршня  $P_b(t)$ , рассчитываемое в соответствии с автомодельным решением Гудерля [4], [6] при начальном значении  $P_b(0) = P_0 = 3/4$ . При этом к центру бежит усиливающаяся ударная волна, описываемая решением Гудерля при всех  $t$  вплоть до встречи (после отражения от центра) с поршнем. В момент схождения на центр

$$t = t_1 = \alpha R_0 \left( \frac{2}{\gamma+1} \frac{\rho_0}{P_0} \right)^{1/2} = \alpha = \begin{cases} 0.815625, & \nu=1, \\ 0.688377, & \nu=2 \end{cases}$$

( $\alpha$  — показатель автомодельности), образуется состояние с постоянной плотностью

$$\rho(t, r) = \rho_1 = \begin{cases} 7.018\rho_0, & \nu=1, \\ 9.550\rho_0, & \nu=2. \end{cases}$$

Максимальное сжатие за фронтом отраженной ударной волны

$$\max\{\rho(t > t_1, r)/\rho_0\} = \begin{cases} 22.98, & \nu=1, \\ 32.28, & \nu=2. \end{cases}$$

Сжатие и разлет шара ( $\nu=2$ ). Одно из простейших автомодельных решений уравнений идеальной гидродинамики — адиабатическое сжатие и разлет шара, плотность газа в котором не зависит от координаты [7]:

$$\rho(t, r) = \rho(t) = \frac{3M}{4\pi R^3}, \quad u(t, r) = r\dot{R}/R,$$

$$P(t, r) = \frac{3MT_0}{4\pi R_0^3} \left( \frac{R_0}{R} \right)^{3\gamma} \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right),$$

где радиус  $R=R(t)$  определяется из уравнения

$$\dot{R} = 2T_0 R_0^{3\gamma-1} R^{2-3\gamma}.$$

При фиксированной массе шара  $M$  решение полностью определяется за-

Параметр	Сфера				Цилиндр	
	1	2	3	4	5	6
$\mu_{s1}$	0	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
$\mu_{s2}$	2	0.25	0.25	0	0.25	0
$\sigma_s$	1	1	1	1	1	1
$\mu_{t1}$	0	0	0.2	0	0	0
$\mu_{t2}$	0	0	0	2	0	2
$\sigma_t$	0	0	0	0.1	0	0.1
$\rho_1$	4.44	9.96	10.1	12.7	8.13	10.2
	8.73	10.8	10.7	12.9	7.19	9.58
	9.76	8.93	8.84	10.4	6.03	8.30
	10.1	8.33	8.28	10.2	6.37	7.64
$\Delta s_2$	1.12	-0.13	-0.15	-0.72	0.23	-0.39
	0.88	0.19	0.23	-0.39	0.07	-0.64
	0.60	0.12	0.17	-0.23	0.02	-0.39
	0.47	0.09	0.14	-0.16	0	-0.27

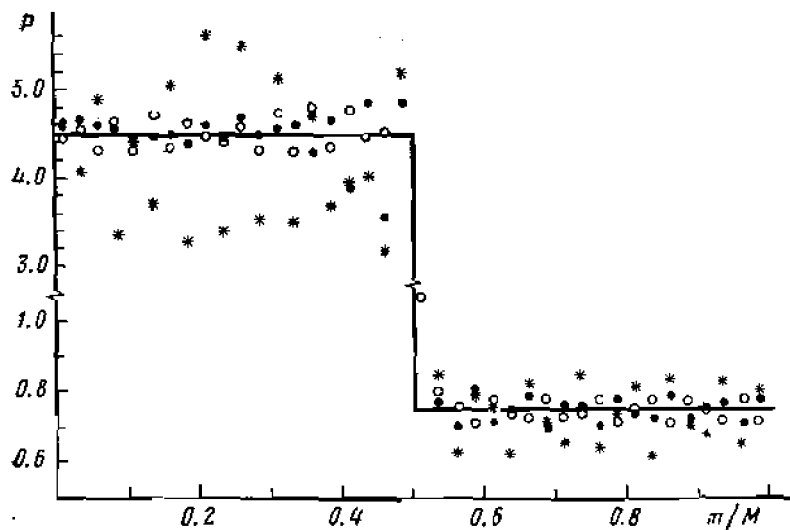
данием центральной температуры  $T_0$  и радиуса  $R_0$  в момент максимального сжатия. Тестовые расчеты проводились для значений

$$\gamma=5/3, \quad M=4\pi/3, \quad R_0=T_0=1.$$

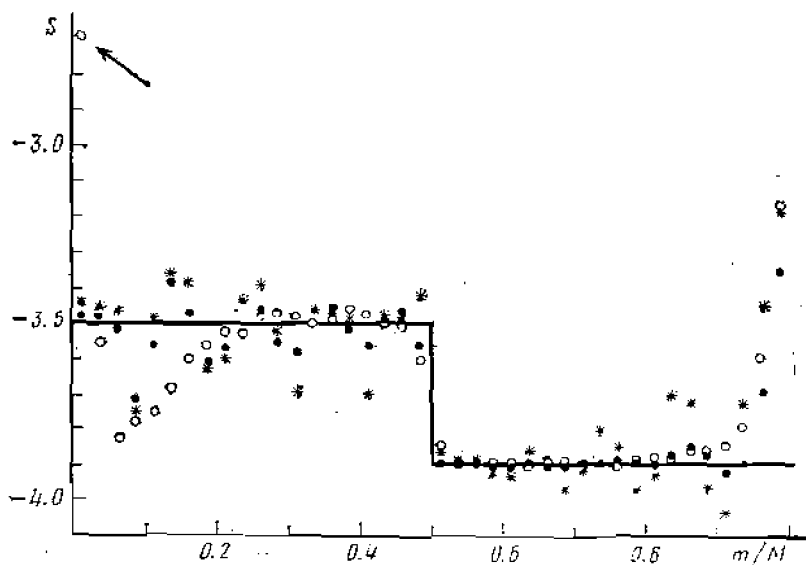
В задаче о расширении начальное состояние — момент максимального сжатия, конечное — характеризуется параметрами  $t=t_1=4$ ,  $R=R_1=5.744563$ ,  $\dot{R}=\dot{R}_1=1.392621$ . В задаче о сжатии начальное и конечное состояния менялись местами с соответствующим изменением знака скорости.

В табл. 1 в столбце 1 (решение Гудерлея) приведен тестовый расчет схождения сферической ударной волны, выполненный со скалярной квадратичной псевдовязкостью Неймана — Рихтмайера. Для сравнения с точным решением выбраны значения плотности  $\rho_1$  в момент кумуляции  $t=t_1$  в первых четырех массовых интервалах (считая от центра), а также избыток (по сравнению с точным решением) энтропии  $\Delta s_2$  в этих же интервалах за отраженной ударной волной. Этот и все последующие расчеты проводились при равномерном разбиении по массе на 100 интервалов (в задаче о поршне — на 40 интервалов); вследствие ограничения на шаг по времени, накладываемого условием Куранта (с коэффициентом запаса  $K_k=0.5$ ) и псевдовязкостью [1], на прохождение фронтом одного массового интервала затрачивалось в среднем  $\sim 10$  шагов по времени. Как хорошо видно из столбца 1 табл. 1, классическая псевдовязкость Неймана — Рихтмайера приводит к сильному избыточному нагреву центра. Отметим, что принятое нами максимальное значение параметра  $\sigma_s=1$  дает минимальный нагрев центрального (первого) интервала (см. (2.8), (2.10)).

Наилучшей с точки зрения описания течений класса А (отражение ударной волны от центра без последующего адиабатического дожатия) оказалась комбинация линейной и квадратичной скалярной вязкости (столбец 2 табл. 1). Однако найденные при этом коэффициенты  $\mu_{s1}$  и  $\mu_{s2}$  сравнительно малы, что проявляется в относительно больших ( $\pm 30\%$ ) колебаниях давления за фронтом (см. фиг. 1). Колебания давления можно подавить добавлением линейной  $t$ -вязкости (до  $\pm 13\%$  при  $\mu_{t1}=0.2$ ), которая почти не сказывается на нагреве центра (см. столбец 3 в табл. 1 и фиг. 1). Попытки правильно описать отражение ударной волны от центра с помощью одной лишь  $t$ -вязкости приводят либо к недостаточному, либо к существенно неоднородному нагреву центральных интервалов.



Фиг. 1



Фиг. 2

Можно, по-видимому, найти также приемлемую комбинацию квадратичных скалярной и  $t$ -вязкости.

Набор вязких коэффициентов из столбцов 2 и 3 табл. 1 дает неплохие результаты также в цилиндрическом и плоском случаях (см. столбец 5 из табл. 1 и фиг. 1 и 2).

Для задач класса Б комбинации  $\mu_{s1}=0$ ,  $\mu_{s2}=2$  и  $\mu_{t1}=0.1$ ,  $\mu_{t2}=0.25$  неприемлемы, поскольку приводят к значительной паразитной генерации энтропии в центральных интервалах на стадии адиабатического сжатия (см. столбцы 1 и 2 табл. 2). В этом случае наилучшей представляется суперпозиция линейной скалярной и квадратичной  $t$ -вязкости  $\mu_{s1}=0.1$ ,  $\mu_{s2}=2$  с коэффициентом аппроксимации  $\sigma_s=0.1$ , для которой недобор энтропии при отражении ударной волны от центра (см. столбец 4 табл. 1) почти полностью компенсируется приростом на стадии адиабатического сжатия (см. столбец 4 табл. 2). Отметим, что в задаче о сжатии шара боль-



Параметр	1	2	3	4
$\mu_{s1}$	0	0.1	0.1	0.1
$\mu_{s2}$	2	0.25	0.25	0
$\sigma_s$	1	1	1	1
$\mu_{t1}$	0	0	0.2	0
$\mu_{t2}$	0	0	0	2
$\sigma_t$	0	0	0	0.1
$\rho_1$	0.37	0.66	0.65	0.68
	0.66	0.83	0.82	0.88
	0.75	0.87	0.87	0.91
	0.89	0.89	0.90	0.92
$\Delta s_1$	2.37	0.96	0.96	0.87
	0.93	0.38	0.39	0.25
	0.61	0.26	0.27	0.18
	0.43	0.20	0.21	0.14
$R_1$	1.144	1.052	1.049	1.035

ные возмущения плотности и энтропии накапливаются в нескольких интервалах, прилегающих к внешней границе: в расчете, соответствующем столбцу 4 табл. 2, величина  $\rho_1=0.46$  (вместо  $\rho_1=1$ ) в последнем интервале  $j=100$ . В целом, однако, сжатие шара описывается вполне удовлетворительно (ср. значение  $R_1$  из табл. 2 с точным значением  $R_1=1$ ).

В задаче о расширении шара искусственная вязкость согласно (2.8), (2.9) равна нулю. Однако из-за погрешностей конечно-разностной аппроксимации к моменту  $t=4$  образуется небольшой дефицит энтропии  $\Delta s_1 = -0.01 \div -0.04$ , который убывает линейно с уменьшением коэффициента запаса  $K_\lambda$  по условию Куранта. При  $K_\lambda=0.5$  на фоне однородного расширения возбуждаются мелкомасштабные колебания с амплитудой  $\Delta\rho/\rho \approx \pm 5\%$ , обусловленные, по-видимому, тем, что в выражениях (2.6), (2.7) использованы не просто скорости с нового слоя по времени  $\bar{u}, \bar{u}_+$ , а полусуммы соответствующих скоростей с нового и старого слоев (что необходимо для консервативности схемы по энергии при  $\varepsilon_v=0, \varepsilon_T=\text{const}$ ). При  $K_\lambda=0.3$  возбуждения колебаний не происходит.

На фиг. 1 и 2 приведены результаты решения задачи о поршне на момент времени  $t_2=1.1$  для первых трех комбинаций вязких коэффициентов из табл. 1. Здесь  $\circ$  — для  $\mu_{s1}=\mu_{t1}=\mu_{t2}=0, \mu_{s2}=2, \sigma_s=1$ ;  $*$  — для  $\mu_{s1}=0.1, \mu_{s2}=0.25, \sigma_s=1, \mu_{t1}=\mu_{t2}=0$ ;  $\bullet$  — для  $\mu_{s1}=0.1, \mu_{s2}=0.25, \sigma_s=1, \mu_{t1}=0.2, \mu_{t2}=\sigma_t=0$ . Видно, что комбинация  $\mu_{s1}=0.1, \mu_{s2}=0.25$  позволяет почти полностью избавиться от эффекта нагрева стенки, а добавление линейной  $t$ -вязкости существенно подавляет колебания за фронтом ударной волны.

Подводя итог проведенным расчетам, можно заключить, что предложенная в данной работе комплексная форма искусственной вязкости позволяет, подобрав под интересующий класс одномерных течений значения шести свободных параметров, сильно ослабить некоторые нежелательные побочные эффекты, присущие классической псевдовязкости Неймана — Рихтмайера.

Автор выражает глубокую признательность Ю. П. Ариншкину и М. В. Соколовскому за плодотворные дискуссии и содействие в работе.

Список литературы

1. Рихтмайер Р., Морган К. Разностные методы решения краевых задач. М.: Мир, 1972.
2. von Neumann J., Richtmyer R. D. A method for the numerical calculations of hydrodynamical shocks // J. Appl. Phys. 1950. V. 21. P. 232-238.
3. Cameron I. G. An analysis of the errors caused by using artificial viscosity terms to represent steady-state shock waves // J. Comput. Phys. 1966. V. 1. № 1. P. 1-20.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
5. Winkler К.-Н. А., Norman M. L., Mihalas D. Implicit adaptive-grid radiation hydrodynamics // Multiple Time Scales. N. Y.: Acad. Press, 1985. P. 145-184.
6. Брушлинский К. В., Каждан Я. М. Об автомодельных решениях некоторых задач газовой динамики // Успехи матем. наук. 1963. Т. 18. Вып. 2(110). С. 3-23.
7. Зельдович Я. Е., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука, 1966.

Поступила в редакцию 22.05.89