ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 1994, том 338, № 4, с. 454 - 456

МАТЕМАТИКА

УДК 519

КВАДРАТУРНАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ СФЕРЫ 59-ГО АЛГЕБРАИЧЕСКОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ

© 1994 г. В. И. Лебедев

Представлено академиком Г.И. Марчуком 08.07.93 г.

Поступило 21.10.93 г.

В настоящей работе приведены координаты узлов и весов квадратурной формулы типа Гаусса для единичной трехмерной сферы 59-го алгебраического порядка точности, инвариантной относительно группы октаэдра с инверсией. Теория и численные методы получения квадратур указанного типа описаны в [1 - 4].

Пусть в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbf{R}_3(x, y, z)$ задана сфера S: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ и вписанный в S октаэдр с вершинами на осях координат. Пусть

$$I(f) = \frac{1}{4\pi}\int_S f(s)ds = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\Pi} d\varphi\int_0^{\Pi} f(\varphi, \theta)\sin\theta d\theta, \quad (1)$$

где $s \in S$. Квадратуру 59-го алгебраического порядка точности возьмем в виде

$$I_{59}(f) = A_1\sum_{i=1}^{6} f(a_i^1) + A_2\sum_{i=1}^{8} f(a_i^2) + A_3\sum_{i=1}^{12} f(a_i^3) + \sum_{k=1}^{13} B_k\sum_{i=1}^{24} f(b_i^k) + \sum_{k=1}^{4} C_k\sum_{i=1}^{24} f(c_i^k) + \sum_{k=1}^{16} D_k\sum_{i=1}^{46} f(d_i^k), \quad (2)$$

где координаты точек при весах $A_1, A_2, A_3, B_k, C_k, D_k$ имеют вид

A_1: $(\pm 1, 0, 0)$, $(0, \pm 1, 0)$, $(0, 0, \pm 1)$;

A_2: $(\pm 2^{-1/2}, \pm 2^{-1/2}, 0)$, $(\pm 2^{-1/2}, 0, \pm 2^{-1/2})$, $(0, \pm 2^{-1/2}, \pm 2^{-1/2})$;

A_3: $(\pm 3^{-1/2}, \pm 3^{-1/2}, \pm 3^{-1/2})$;

B_k: $(\pm l_k, \pm m_k, \pm l_k)$, $(\pm m_k, \pm l_k, \pm l_k)$, $(\pm l_k, \pm l_k, \pm m_k)$,

$$l_k = 2^{-1/2}(1 - m_k^2)^{1/2};$$

C_k: $(\pm q_k, \pm r_k, 0)$, $(\pm r_k, \pm q_k, 0)$, $(\pm q_k, 0, \pm r_k)$, $(\pm r_k, 0, \pm q_k)$, $(0, \pm q_k, \pm r_k)$, $(0, \pm r_k, \pm q_k)$,

$$r_k = (1 - q_k^2)^{1/2};$$

D_k: $(\pm u_k, \pm v_k, \pm w_k)$, $(\pm u_k, \pm w_k, \pm v_k)$, $(\pm v_k, \pm u_k, \pm w_k)$, $(\pm v_k, \pm w_k, \pm u_k)$, $(\pm w_k, \pm u_k, \pm v_k)$, $(\pm w_k, \pm v_k, \pm u_k)$,

$$u_k^2 + v_k^2 + w_k^2 = 1.$$

В табл. 1 приведены с двенадцатью значащими цифрами значения весов A_1, A_2, A_3 и координаты образующих узлов и соответствующие им веса по группам: в группе B – (l_k, m_k, B_k), в группе C – (q_k, r_k, C_k), в группе D – (u_k, v_k, w_k, D_k).

Квадратурная формула (2) содержит 1202 узла и точно интегрирует все 3600 сферических гармоник до 59-го порядка включительно; ее коэффициент эффективности η [1] равен 0.9983.

На рис. 1 приведена сетка на сфере, построенная по узлам квадратурной формулы (2). Видно, что узлы квадратуры правильно, почти равномерно триангулируют поверхность сферы, а табл. 1 показывает, что веса квадратуры положительны и выравнены (точнее, их значения пропорциональны площадям треугольников, окружающих каждый узел). Следовательно, гипотеза автора о существовании подобных квадратур типа Гаусса алгебраической степени точности при $n = 12m + 11$, $m = 0, 1, \ldots$, подтвердилась и на этот раз.

Параметры квадратуры получены применением усовершенствованных методов и оценок, изложенных в [4]; при этом была использована новая модифицированная автором версия программы на языке Фортран, написанная А.Л. Скороходовым для получения квадратур 41-, 47-, 53-го порядков [4]. Расчеты проведены на ЭВМ типа "CYBER" с двойной точностью, имеющей мантиссу длины 32 десятичных разряда.

Российский научный центр "Курчатовский институт", Москва

Институт вычислительной математики Российской Академии наук, Москва

Таблица 1

A_1 = .110518923327D–03	A_2 = .920523273809D–03	A_3 = .913315978645D–03

Группа B

k	l_k	m_k	B_k
1	.371263644966D–01	.998620681800D+00	.369042189802D–03
2	.914006041226D–01	.991610739722D+00	.560399092868D–03
3	.153107785247D+00	.976276606395D+00	.686529762928D–03
4	.218092889166D+00	.951247067481D+00	.772033855115D–03
5	.283987453220D+00	.915806886209D+00	.830154595889D–03
6	.349117760096D+00	.869616915182D+00	.868669255018D–03
7	.412143146144D+00	.812573722300D+00	.892707628585D–03
8	.471899362715D+00	.744729469632D+00	.906082023857D–03
9	.527314545284D+00	.666242253736D+00	.911977725494D–03
10	.620947533244D+00	.478380938077D+00	.912872013860D–03
11	.656972271186D+00	.369830866459D+00	.913071493569D–03
12	.684178830907D+00	.252583955701D+00	.915287378455D–03
13	.701260433012D+00	.128326186660D+00	.918743627432D–03

Группа C

k	q_k	r_k	C_k
1	.107238221548D+00	.994233354821D+00	.517697731297D–03
2	.258206895950D+00	.966089643296D+00	.733114368210D–03
3	.417275295531D+00	.908780131682D+00	.846323283638D–03
4	.570036691179D+00	.821619237061D+00	.903112269425D–03

Группа D

k	u_k	v_k	w_k	D_k
1	.982798601826D+00	.177177402262D+00	.521063947701D–01	.648577845316D–03
2	.962424923033D+00	.247571646343D+00	.111564095716D+00	.743503091098D–03
3	.940200799413D+00	.335461628907D+00	.590588885324D–01	.799852789184D–03
4	.932082204014D+00	.317361524661D+00	.174655167758D+00	.810173149747D–03
5	.904367419939D+00	.409026842709D+00	.121723505110D+00	.848338957459D–03
6	.891240756007D+00	.385429115067D+00	.239027847938D+00	.855629925731D–03
7	.867643562846D+00	.493222118485D+00	.626625062415D–01	.880320867974D–03
8	.858197998604D+00	.478532067592D+00	.185750519455D+00	.881104818243D–03
9	.839675362405D+00	.450742259316D+00	.302946697353D+00	.885028234127D–03
10	.816528856402D+00	.563212302076D+00	.126777480068D+00	.902134229904D–03
11	.801546937078D+00	.543430356969D+00	.249411216236D+00	.901009167711D–03
12	.777356306907D+00	.512351848642D+00	.364983226060D+00	.902269293843D–03
13	.766162121390D+00	.639427963475D+00	.642454922422D–01	.915801617469D–03
14	.755358414353D+00	.626980550902D+00	.190601822278D+00	.913157800319D–03
15	.734430575756D+00	.603116169310D+00	.311227594715D+00	.910781357948D–03
16	.704383718402D+00	.569370249847D+00	.423864478152D+00	.910576025897D–03

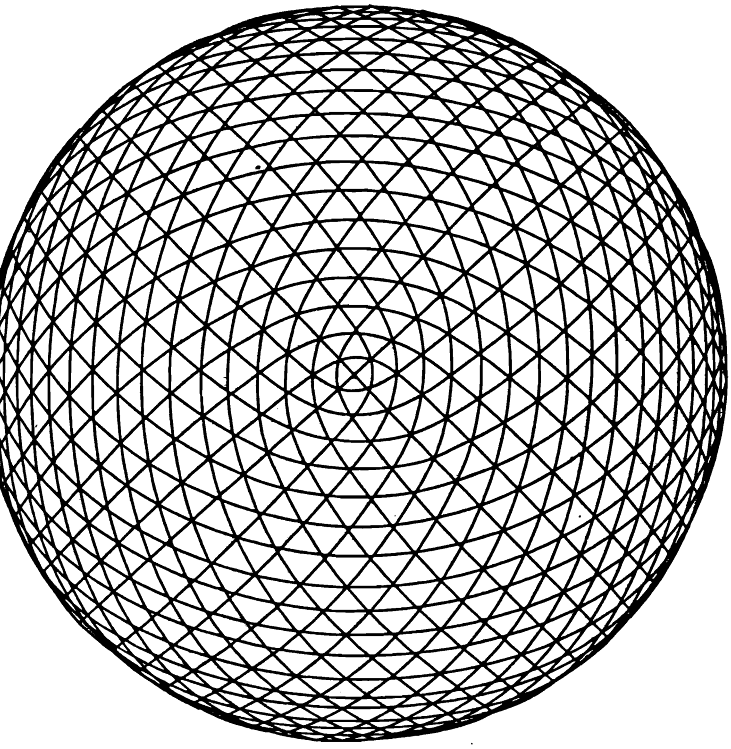

Рис. 1.

Приведенная квадратура пригодна для вычисления интегралов по поверхностям областей звездного типа и построения на них правильных треугольных сеток. Для этого достаточно в поверхностном интеграле перейти к сферическим координатам, преобразовав тем самым его в интеграл по сфере.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93–012–594).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лебедев В.И.* // ЖВМ и МФ. 1976. Т. 16. № 2. С. 293 - 306.
2. *Лебедев В.И.* // Сиб. мат. журн. 1977. Т. 18. № 1. С. 132 - 142.
3. *Лебедев В.И.* Теория кубатурных формул и вычислительная математика. Тр. конф. по дифференциальным уравнениям и вычислительной математике. Новосибирск, 1978. С. 110 - 114.
4. *Лебедев В.И., Скороходов А.Л.* // ДАН. 1992. Т. 324. № 3. С. 519 - 524.